ADRIAN CORDUNEANU

ECUAŢII DIFERENŢIALE

CU APLICAŢII ÎN ELECTROTEHNICĂ

EDITURA FACLA

facla

În lucrare sînt tratate „Ecuații și sisteme de ecuații diferențiale ordinare“ (Capitolul 1), „Calculul operațional“ (Capitolul 2), „Ecuații cu derivate parțiale folosite în electrotehnică“ (Capitolul 3).

La redactarea materialului, autorul a avut în vedere cele mai noi lucrări destinate fundamentării aparatului matematic folosit în inginerie.

Expunerea teoretică este ilustrată prin exerciții, în scopul unui studiu aprofundat, adecvat procesului de integrare a învățămîntului cu cercetarea și producția.

Lucrarea se adresează tuturor specialiștilor și cercetătorilor în științe tehnice, matematice, studenților din institute tehnice și universități.

Lei 12

CAPITOLUL 1

ECUAŢII ŞI SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE ORDINARE

1.1. ECUAŢIA DIFERENŢIALĂ ORDINARĂ DE ORDINUL ÎNTÎI

Vom numi astfel o relaţie de forma:

$$y'(x) = f(x,y), \tag{1}$$

unde $f = f(x,y)$ este o funcţie reală, definită într-un domeniu din spaţiul variabilelor x şi y. Prin soluţie a ecuaţiei date înţelegem orice funcţie $y = y(x)$, derivabilă pe intervalul ei de definiţie şi avînd proprietatea că $y'(x) = f(x,y(x))$ pe acest interval. Problema care se pune constă în a determina toate soluţiile unei ecuaţii

diferențiale date. Înainte de a formula condițiile precise și de a demonstra teoreme de existență pentru soluția ecuației (1), ne vom ocupa de unele cazuri simple, în care soluția poate fi găsită prin metode elementare.

Ecuația $y'(x)=f(x)$. Vom admite că funcția $f=f(x)$ este continuă pe intervalul (a, b). Soluția generală a acestei ecuații, adică mulțimea tuturor soluțiilor ei, coincide în mod evident cu familia primitivelor funcției f. Soluția particulară care satisface condiția inițială $y(x_0)=y_0$ este

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,\quad x\in(a,b). \tag{2}$$

Bineînțeles, x_0 este un număr din intervalul (a, b), iar y_0 este un număr real oarecare.

Ecuația diferențială

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0. \tag{3}$$

Presupunem că funcțiile de două variabile $P=P(x, y)$ și $Q=Q(x, y)$ sînt continui pentru $a<x<b$, $c<y<d$ și că derivatele parțiale $\partial Q/\partial x$ și $\partial P/\partial y$ sînt de asemenea continui și în plus $\partial Q/\partial x\equiv\partial P/\partial y$. După cum se știe, în acest caz primul membru al ecuației (3) este diferențială exactă și integrala sa curbilinie nu depinde de forma drumului, ci numai de extremitățile sale. Dacă vom pune

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(u,v)\,du+Q(u,v)\,dv, \tag{4}$$

înseamnă că am definit în dreptunghiul $a<x<b$, $c<y<d$ o funcție cu derivate parțiale de ordinul întîi continui, pentru care avem:

$$F(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y). \tag{5}$$

Admițînd că funcțiile P și Q nu se anulează simultan în nici un punct, din condiția $Q(x_0, y_0)\neq 0$ vom găsi cu ajutorul teoremei funcțiilor implicite că există o funcție unică $y=y(x)$, definită într-o vecinătate suficient de mică a punctului x_0, satisfăcînd condiția $y(x_0)=y_0$ și ecuația

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)y'(x)=0, \tag{6}$$

care nu este altceva decît o formă echivalentă a ecuației (3). Dacă $Q(x_0,y_0)=0$, atunci $P(x_0,y_0)\neq 0$ și putem explicita pe x în funcție de y, obținînd soluția în forma $x=x(y)$. Deoarece (x_0, y_0) a fost ales arbitrar în dreptunghiul considerat, problema integrării ecuației (3) poate fi considerată rezolvată.

Ecuația cu variabile separate

$$y'(x)=\frac{f(x)}{g(y)}. \tag{7}$$

Presupunem că $f=f(x)$ este continuă pe (a,b), iar $g=g(y)$ este continuă și diferită de zero pe (c,d). Scriind ecuația (7) în forma echivalentă

$$f(x)\,dx-g(y)\,dy=0, \tag{8}$$

vedem că ea este un caz particular al ecuației (3). Soluția pentru care $y(x_0)=y_0$ se obține explicitînd ecuația

$$\int_{x_0}^{x} f(u)\,du-\int_{y_0}^{y} g(v)\,dv=0, \tag{9}$$

care din punct de vedere formal se obține din (8) prin integrarea termen cu termen între limitele x_0 și x, respectiv y_0 și y. Deoarece funcția g nu se anulează pe (c,d), rezultă că ea păstrează semn constant pe acest interval și deci funcția

$$G(y)=\int_{y_0}^{y} g(v)\,dv;\quad c<y<d \tag{10}$$

este strict monotonă, prin urmare admite inversă G^{-1}. Concluzia este că soluția ecuației (7) care satisface condiția inițială $y(x_0)=y_0$, cu $x_0\in(a, b)$ și $y_0\in(c, d)$, este definită pe un interval suficient de mic cu centrul în x_0 (uneori chiar pe tot intervalul (a,b)) și este dată prin relația

$$y(x)=G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(u)\,du\right). \tag{11}$$

Intervalele (a,b) și (c,d) pot fi infinite. Uneori, ecuația cu variabile separate se scrie în forma

$$y'(x)=f(x)g(y),\quad g(y)\neq 0 \text{ pe } (c,d). \tag{12}$$

Dacă notăm $g(y)$ cu $1/h(y)$, este evident că se ajunge la o ecuație de forma (7).

Ecuația diferențială omogenă. Aceasta are forma

$$y'(x)=f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{13}$$

unde $f=f(u)$ este o funcție continuă pentru $u\in(a,b)$ și $f(u)-u\neq 0$ pe acest interval. Făcînd substituția $y=xu$ și luînd $u=u(x)$ drept noua funcție necunoscută, vom găsi

$$u'(x)=\frac{1}{x}(f(u)-u), \tag{14}$$

care este o ecuație cu variabile separate. Dacă D este domeniul din plan definit prin

$$D=\left\{(x,\ y);\ a<\frac{y}{x}<b,\ x\neq 0\right\}, \tag{15}$$

atunci, oricare ar fi $(x_0,y_0)\in D$, există o soluție a ecuației (13) trecînd prin acest punct. Este suficient să găsim $u=u(x)$ din ecuația următoare

$$\int_{u_0}^{u}\frac{du}{f(u)-u}=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}, \tag{16}$$

în care $u_0=y_0/x_0$ și să punem $y(x)=xu(x)$ pentru a obține soluția căutată.

Ecuația diferențială liniară de ordinul întîi. Aceasta este de forma

$$y'(x)=a(x)y+b(x),\quad x\in I, \tag{17}$$

în care funcțiile $a=a(x)$ și $b=b(x)$ sînt continui pe intervalul I. Ecuația omogenă atașată ei este $z'(x)=a(x)z$ și putem scrie

$$z'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}a(t)dt}-a(x)z(x)e^{-\int_{x_0}^{x}a(t)dt}=0,\quad x\in I, \tag{18}$$

unde x_0 este un punct fixat din I. Observăm că (18) poate fi scrisă în forma echivalentă

$$\left(z(x)e^{-\int_{x_0}^{x}a(t)dt}\right)'_x\equiv 0,\quad x\in I, \tag{19}$$

din care se trage concluzia că

$$z(x)=ce^{\int_{x_0}^{x}a(t)dt},\quad c=\text{constantă arbitrară} \tag{20}$$

ne dă soluția generală (familia tuturor soluțiilor) a ecuației omogene atașate lui (17). Soluția generală a ecuației (17) se poate afla prin metoda variației constantelor (Lagrange). Anume, se va căuta soluția ei în forma:

$$y(x)=u(x)e^{\int_{x_0}^{x}a(t)dt},\quad x\in I \tag{21}$$

unde funcția derivabilă $u=u(x)$ urmează să fie determinată Derivînd și înlocuind în (17), găsim:

$$u'(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}a(t)dt}b(x),\quad x\in I \tag{22}$$

de unde, prin integrare se află funcția $u=u(x)$. Soluția generală a ecuației (17) va fi deci:

$$y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}a(t)dt}\left(c+\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{t}a(s)ds}b(t)dt\right), \tag{23}$$

unde c este o constantă arbitrară, care se determină în mod unic din condiția inițială. De exemplu, soluția pentru care $y(x_0)=y_0$, se obține luînd $c=y_0$. Orice soluție a ecuației liniare (17) este definită pe întreg intervalul I.

Ecuația diferențială Bernoulli. Se numește așa ecuația

$$y'(x)=a(x)y+b(x)y^n,\quad x\in I \tag{24}$$

în care: $a=a(x)$ și $b=b(x)$ sînt continui pe intervalul I, iar n este un exponent real, diferit de 0 și 1. Dacă n este un număr real oarecare, diferit de un întreg, vom observa că pentru ecuația (24) are sens să căutăm numai soluții pozitive. Împărțind ecuația dată cu y^n și luînd $z=y^{1-n}$ noua funcție necunoscută, obținem ecuația liniară

$$z'(x)=(1-n)a(x)z+(1-n)b(x),\quad x\in I \tag{25}$$

După aflarea lui $z=z(x)$, soluția ecuației (24) va fi cunoscută și dată prin egalitatea $y=z^{1/1-n}$. În general, nu toate soluțiile ecuației

Bernoulli vor fi definite pe tot intervalul I, trebuind să ne limităm numai la intervalul pe care $z(x)>0$.

Ecuația diferențială Riccati. Această ecuație este de forma:

$$y'=a(x)y+b(x)y^2+c(x), \quad x\in I. \tag{26}$$

unde coeficienții sînt funcții continui pe intervalul I. Vom presupune $b(x)\not\equiv 0$ și $c(x)\not\equiv 0$ pentru ca ecuația precedentă să nu se reducă la una liniară sau la una de tip Bernoulli cu $n=2$. De foarte mare importanță este aici cunoașterea unei soluții particulare $y=y_0(x)$. În adevăr, în acest caz, făcînd substituția $y=y_0+z$ și luînd z drept noua funcție necunoscută, găsim:

$$z'=(a(x)+2y_0(x)b(x))z+b(x)z^2, \quad x\in I \tag{27}$$

care este o ecuație de tip Bernoulli și poate fi redusă la una liniară punînd $u=z^{-1}$. Pentru determinarea lui u, vom avea ecuația:

$$u'=-(a(x)+2y_0(x)b(x))u-b(x), \quad x\in I. \tag{28}$$

Orice soluție a ecuației (26) se poate deci scrie în forma:

$$y(x)=y_0(x)+\frac{1}{u(x)}, \tag{29}$$

unde $u=u(x)$ este o soluție a ecuației liniare (28). Deoarece $u=u(x)$ se poate anula într-un punct din I, rezultă că graficul soluției $y=y(x)$ poate avea asimptote verticale în unele puncte din intervalul I.

Cele cîteva tipuri de ecuații, enumerate mai sus, sînt cazuri particulare ale ecuației (1) și, așa cum s-a văzut, integrarea lor se face prin metode elementare. Avem nevoie însă de o teoremă care să ne garanteze existența și eventual unicitatea soluției în cazul general al ecuației (1). În acest scop, vom da următoarea *Definiția 1.1.* Vom spune că $f=f(x,y)$ definită în domeniul D din plan satisface condiția Lipschitz locală, dacă orice punct $(x_0,y_0)\in D$ are o vecinătate $V(x_0,y_0)\subset D$ cu proprietatea că oricare ar fi (x,y), $(x,y)\in V(x_0,y_0)$ are loc inegalitatea

$$|f(x,y)-f(x,\overline{y})|\leqslant L|y-\overline{y}|. \tag{30}$$

Constanta $L\geqslant 0$ depinde, în general, de punctul (x_0,y_0) ales din D. Este evident că dacă $\partial f/\partial y$ există și este continuă în D, condiția amintită este satisfăcută.

Dacă inegalitatea (30) are loc pentru orice perechi de puncte (x,y) și $(x,\overline{y})$ din D cu aceeași constantă L, vom spune că f

satisface în D condiția Lipschitz globală. Este evident că dacă o funcție satisface în D condiția Lipschitz globală, ea va satisface cu atît mai mult și condiția Lipschitz locală, reciproca nefiind adevărată în general.

Teorema 1.1. *Presupunem că $f=f(x,y)$ este continuă în D și satisface condiția Lipschitz locală. Atunci, oricare ar fi $(x_0, y_0)\in D$ există o singură soluție $y=y(x)$ a ecuației* (1), *definită într-o vecinătate suficient de mică a punctului x_0 și satisfăcînd condiția $y(x_0)=y_0$.*

Demonstrație. Ecuația (1), cu condiția inițială $y(x_0)=y_0$, este echivalentă cu ecuația integrală

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt. \tag{31}$$

Aceasta înseamnă că dacă funcția $y=y(x)$, definită pe un interval ce conține x_0, satisface (1) și condiția $y(x_0)=y_0$, atunci ea satisface și ecuația (31). Reciproc, dacă $y=y(x)$ continuă satisface (31), atunci ea satisface și ecuația (1) cu condiția inițială $y(x_0)=y_0$. Vom căuta deci soluții continui pentru ecuația integrală (31), utilizînd așa-numita metodă a aproximațiilor succesive, care constă în construirea prin recurență a unui șir de funcții care să convergă uniform la soluția căutată.

Vom nota prin I intervalul $|x-x_0|\leqslant h$, unde $h=min\{a, b/M\}$. Prin $2a$ și $2b$ am notat lungimile laturilor dreptunghiului maxim cu centrul în (x_0,y_0) și complet inclus în D, iar prin M am notat marginea superioară a valorilor funcției $|f|$ pe acest dreptunghi. Fără a micșora generalitatea, putem presupune că dreptunghiul $|x-x_0|\leqslant h$, $|y-y|\leqslant b$ este inclus în $V(x_0,y_0)$. Vom pune

$$y_0(x)=y_0, \quad y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))\,dt, \quad n\geqslant 0 \tag{32}$$

și vom observa că dacă presupunem că $y=y_n(x)$ este definită pe I și are graficul în dreptunghiul $|x-x_0|\leqslant h$, $|y-y_0|\leqslant b$, rezultă că funcția $y=y_{n+1}(x)$ are aceeași proprietate. Pentru a ne convinge de aceasta, este suficient să ținem seama de inegalitatea:

$$|y_{n+1}(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))\,dt\right|\leqslant Mh\leqslant b, \quad x\in I. \tag{33}$$

Deoarece prima aproximantă $y=y_0(x)$ are proprietatea la care ne-am referit, rezultă că toate funcțiile $y=y_n(x)$ sînt definite pe I și au graficul în dreptunghiul $|x-x_0|\leqslant h$, $|y-y_0|\leqslant b$. Evident, funcțiile $y=y_n(x)$ sînt și continui pe I.

Pentru a arăta convergența uniformă a șirului $(y_n(x))$, observăm că

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant b\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!},\quad x\in I,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{34}$$

care se poate arăta prin inducție completă. În adevăr, pentru $n=0$ inegalitatea precedentă este adevărată. Dacă presupunem că ea are loc pentru un număr n, va avea loc și pentru $n+1$, deoarece

$$|y_{n+2}(x)-y_{n+1}(x)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,\,y_{n+1})-f(t,\,y_n)|\,dt\right|\leqslant \tag{35}$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}L|y_{n+1}(t)-y_n(t)|\,dt\right|\leqslant b\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!},\qquad x\in I.$$

Din (34) se deduce imediat convergența uniformă pe I a seriei de funcții

$$y_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(y_{n+1}(x)-y_n(x)),\quad x\in I, \tag{36}$$

adică convergența uniformă pe I a șirului de funcții $(y_n(x))$. Notînd $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)$ și trecînd la limită în relația de recurență (32), se găsește că funcția continuă $y=y(x)$ satisface ecuația (31) pe intervalul I și deci este soluția ecuației (1), pentru care $y(x_0)=y_0$. Din punct de vedere geometric, condiția inițială $y(x_0)=y_0$ exprimă faptul că graficul soluției găsite trece prin punctul $(x_0,y_0)\in D$.

Dacă $y=\overline{y}(x)$ este o altă soluție a ecuației (1) pentru care $\overline{y}(x_0)=y_0$, fără a micșora generalitatea putem să o presupunem definită pe același interval I ca și soluția $y=y(x)$, găsită prin metoda aproximațiilor succesive. Notînd

$$k=\sup_{x\in I}|y(x)-\overline{y}(x)|, \tag{37}$$

din iterarea inegalității

$$|y(x)-\overline{y}(x)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}L|y(t)-\overline{y}(t)|\,dt\right|,\quad x\in I \tag{38}$$

se obține $k\leqslant k(Lh)^n/n!$ pentru orice n natural, deci $k=0$, adică $\overline{y}(x)=y(x)$ pentru $x\in I$. Aceasta arată unicitatea soluției căutate și demonstrația este încheiată.

Din punct de vedere geometric, unicitatea soluției revine la faptul că graficele a două soluții distincte ale ecuației (1) nu au nici un punct comun în D. Teorema precedentă are caracter local, adică garantează existența soluției numai într-o vecinătate suficient de mică a punctului x_0. Considerînd punctul $(x_0+h,\ y(x_0+h))$ din D și aplicînd din nou rezultatul stabilit, se vede că soluția $y=y(x)$ pe care am construit-o, se poate prelungi la dreapta punctului x_0+h. Asemănător, plecînd de la punctul $(x_0-h,\ y(x_0-h))$, se vede că prelungirea este posibilă și la stînga punctului x_0-h. Se poate demonstra că orice soluție a ecuației (1) se poate prelungi în ambele sensuri pînă la frontiera domeniului D, cu alte cuvinte graficul ei este o parte din graficul unei soluții numită saturată.

Ne putem pune întrebarea cît de repede converge șirul de aproximante $(y_n(x))$ definit de relația (32) la soluția $y=y(x)$ a ecuației (1) cu condiția inițială $y(x_0)=y_0$. Dacă notăm $\varepsilon_n(x)=|y(x)-y_n(x)|$ și ținem seama de relația evidentă

$$|y(x)-y_n(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y(t))-f(t,y_{n-1}(t))]\,dt\right|\leqslant \tag{39}$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}L|y(t)-y_{n-1}(t)|\,dt\right|,$$

putem scrie

$$\varepsilon_n(x)\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon_{n-1}(t)\,dt\right|,\quad x\in I,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{40}$$

Deoarece

$$\varepsilon_0(x)=|y(x)-y_0(x)|\leqslant M|x-x_0|,\ x\in I \tag{41}$$

se ajunge din aproape în aproape la

$$\varepsilon_n(x) \leqslant \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{M}{L}\frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x\in I \tag{42}$$

care ne dă o evaluare a erorii ce am face-o dacă ne-am opri la aproximanta de ordin n a soluției căutate.

În anumite cazuri, este posibil ca prin metoda aproximațiilor succesive să obținem o soluție globală a ecuației (1). Vom presupune că domeniul D are o formă specială, anume:

$$D=\{(x,y);\ x>a,\ -\infty<y<\infty\}, \tag{43}$$

unde a este o constantă. Vom admite de asemenea că funcția $f=f(x, y)$ satisface condiția că pentru oricare $A>a$ există o constantă pozitivă $L=L(A)$, astfel încît;

$$|f(x,y)-f(x,\overline{y})|\leqslant L|y-\overline{y}|,\ \forall x\in[a,A] \text{ și } \forall y,\ \overline{y} \text{ reali.} \tag{44}$$

Teorema 1.2. *Dacă funcția $f=f(x, y)$ este continuă pe mulțimea D definită de* (43) *și satisface condiția* (44), *atunci oricare ar fi $(x_0, y_0)\in D$ există o singură soluție $y=y(x)$ a ecuației* (1), *definită pe $[x_0, \infty)$ și satisfăcînd condiția $y(x_0)=y_0$.*

Demonstrație. În adevăr, considerînd un interval $[x_0, A]$ și aproximantele (32), acestea vor fi definite pe întreg intervalul $[x_0, A]$ și vor converge uniform pe el la soluția căutată $y=y(x)$, deoarece notînd cu M_1 marginea superioară a funcției $|y_1(x)-y_0|$ pe acest interval, se stabilește că

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant M_1\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!};\quad x\in[x_0, A],\quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{45}$$

și deci putem judeca la fel ca în cazul de care ne-am ocupat. Deoarece $A>x_0$ a fost luat arbitrar, rezultă că soluția precedentă există pentru toți $x\geqslant x_0$, adică există pe $[x_0, \infty)$. Unicitatea se arată la fel ca în cazul Teoremei 1.1.

Observație. Dacă se admite că L nu depinde de A și că

$$\sup_{x\geqslant x_0}\left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\mathrm{d}t\right| = M = \text{finit}, \tag{46}$$

ținînd seama de relațiile (36), (45) și (46) rezultă că soluția problemei

$$y'(x)=f(x, y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{47}$$

există pe $[x_0, \infty)$ și satisface majorarea

$$|y(x)|\leqslant|y_0|+Me^{L(x-x_0)},\quad x\geqslant x_0. \tag{48}$$

Teoremele care garantează existența globală a soluției unei ecuații diferențiale sînt atît de puțin numeroase, încît merită să mai amintim una, datorită lui A. Bielecki. Dar pentru aceasta, avem nevoie de cîteva noțiuni introductive.

O mulțime E se numește spațiu metric, dacă pe produsul cartezian $E\times E$ este definită o funcție reală d, avînd proprietățile

(i) $d(x, y)\geqslant 0,\ \forall x, y\in E$ și $d(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$

(ii) $d(x, y)=d(y, x),\ \forall x, y\in E$

(iii) $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y),\ \forall x, y, z\in E.$

O funcție $d: E\times E\to R_+$, unde prin R_+ am notat mulțimea numerelor reale $\geqslant 0$, satisfăcînd axiomele de mai sus, se numește metrică sau distanță. Putem deci spune că un spațiu metric este ansamblul (E, d) format din o mulțime suport E și o metrică $d: E\times E\to R_+$. Dreapta reală, în care distanța dintre două puncte x și y se definește prin relația $d(x, y)=|x-y|$, este cel mai natural exemplu de spațiu metric.

Un șir (x_n) de elemente din spațiul metric E se numește șir Cauchy (șir fundamental), dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $N=N(\varepsilon)$, astfel încît

$$d(x_m, x_n)<\varepsilon, \text{ dacă } m, n\geqslant N(\varepsilon).$$

Un șir (x_n) de elemente din E se numește convergent la $x\in E$, dacă $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x)=0$. Elementul x se numește limita șirului (x_n) și se scrie $\lim_{n\to\infty} x_n=x$. Este evident că orice șir convergent este șir Cauchy, dar reciproca nu este adevărată în orice spațiu metric. Un spațiu metric E pentru care orice șir Cauchy este convergent, se numește spațiu metric complet.

Un operator $T: E\to E$ se numește contractant, dacă există o constantă $\alpha(0\leqslant\alpha<1)$, astfel încît

$$d(Tx, Ty)\leqslant\alpha d(x, y),\ \forall x, y\in E.$$

În fine, un element (punct) $x\in E$ se numește punct fix al operatorului $T: E\to E$, dacă $Tx=x$.

Teorema lui Banach. *Dacă E este un spațiu metric complet, operatorul contractant $T: E \to E$ are un punct fix și numai unul.*

Demonstrație. Fie $x_0 \in E$ un punct fixat și să considerăm șirul

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1,\ \ldots,\ x_n = Tx_{n-1},\ \ldots$$

Pentru a arăta că acesta este un șir Cauchy, vom observa că

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(Tx_k, Tx_{k-1}) \leqslant \alpha d(x_k, x_{k-1}),$$

de unde prin repetarea procedeului vom găsi

$$d(x_{k+1}, x_k) \leqslant \alpha^k d(x_1, x_0),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dacă $m > n$ sînt două numere naturale, putem scrie

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{m-1}) d(x_1, x_0) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

Avînd în vedere că α este subunitar, iar $d(x_1, x_0)$ este o constantă, deducem că (x_n) este un șir Cauchy. Deoarece E este complet, rezultă că există un punct $x \in E$, care să fie limita șirului (x_n). Dar $d(x, Tx) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, Tx_n) + d(Tx_n, Tx) \leqslant 2d(x_n, x) + d(x_n, x_{n+1})$, de unde găsim $d(x, Tx) = 0$, adică $Tx = x$. Prin urmare, x este punct fix pentru operatorul T. Unicitatea acestui punct fix se arată astfel: dacă x^* este și el punct fix pentru T, adică $Tx^* = x^*$, atunci din inegalitatea $d(x, x^*) = d(Tx, Tx^*) \leqslant \alpha d(x, x^*)$ obținem $d(x, x^*) = 0$, adică $x^* = x$.

Teorema 1.3. *Considerăm ecuația diferențială*

$$y' = f(x, y) \tag{49}$$

și presupunem că

(a) *$f = f(x, y)$ este continuă în domeniul*

$$D = \{(x, y);\ x \geqslant 0,\ -\infty < y < \infty\},$$

(b) *există o funcție continuă și negativă $L = L(x)$, definită pentru $x \geqslant 0$, astfel încît*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L(x)|y_1 - y_2|,\ \forall (x, y_1),\ (x, y_2) \in D, \tag{50}$$

(c) *există două constante $M \geqslant 0$ și $\alpha > 1$, astfel încît*

$$|f(x, 0)| \leqslant ML(x) e^{\alpha \int_0^x L(t)dt},\quad x \geqslant 0. \tag{51}$$

Atunci, soluția unică a ecuației (49) cu condiția inițială $y(0) = y_0$ este definită pe întreaga semiaxă $x \geqslant 0$. În plus, există o constantă $K = K(y_0) \geqslant 0$ astfel încît această soluție satisface majorarea

$$|y(x)| \leqslant K e^{\alpha \int_0^x L(t)dt},\quad x \geqslant 0. \tag{52}$$

Demonstrație. Deoarece este îndeplinită condiția Lipschitz locală, unicitatea soluției ecuației (49) cu condiția $y(0) = y_0$ este garantată. Deoarece această ecuație cu condiția $y(0) = y_0$ este echivalentă cu ecuația integrală

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t))dt,\quad x \geqslant 0, \tag{53}$$

ne vom ocupa de aceasta din urmă. Pentru simplificarea scrierii, vom nota funcția exponențială e^x cu $exp(x)$. Considerăm spațiul E, constînd din toate funcțiile $y = y(x)$ continui pentru $x \geqslant 0$ și satisfăcînd condiția

$$|y(x)| exp\left(-\alpha \int_0^x L(t)dt\right) = \text{mărginită pentru } x \geqslant 0. \tag{54}$$

Definim distanța dintre două elemente y și z ale acestui spațiu, prin relația

$$d(y, z) = \sup_{x \geqslant 0} |y(x) - z(x)| exp\left(-\alpha \int_0^x L(t)dt\right),\quad y, z \in E. \tag{55}$$

Se verifică ușor că față de această metrică, E este un spațiu complet. Vom arăta că operatorul T, definit prin

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t))dt,\quad x \geqslant 0 \tag{56}$$

duce spațiul E în el însuși și este contractant. În adevăr, dacă $y \in E$ are loc o inegalitate de forma

$$|y(x)| \leqslant K_1 exp(\alpha \int_0^x L(t)dt), \quad x \geqslant 0 \tag{57}$$

și ținînd seama de

$$|(Ty)(x)| \leqslant |(y_0)| + \int_0^x |f(t,0)|dt + \int_0^x |f(t,y(t)) - f(t,0)|dt \leqslant \tag{58}$$

$$\leqslant |y_0| + \frac{M+K_1}{\alpha} exp(\alpha \int_0^x L(t)dt), \quad x \geqslant 0$$

vom obține

$$|(Ty)(x)| \leqslant K_2 exp\,(\alpha \int_0^x L(t)dt), \quad x \geqslant 0 \tag{59}$$

unde K_2 este o anumită constantă, ceea ce ne spune că $Ty \in E$. Mai departe, putem scrie

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)|exp(-\alpha \int_0^x L(t)dt) \leqslant \tag{60}$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha} \int_0^x \alpha L(t) exp\,(\alpha \int_x^t L(s)ds)|y(t) - z(t)|exp(-\alpha \int_0^t L(s)ds)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\ d(y,z) \int_0^x \alpha L(t) exp\,(\alpha \int_x^t L(s)ds)dt \leqslant \frac{1}{\alpha} d(y,z), \quad x \geqslant 0$$

de unde tragem concluzia că

$$d(Ty, Tz) \leqslant \frac{1}{\alpha} d(y, z), \tag{61}$$

oricare ar fi $y, z \in E$. Deoarece $\alpha > 1$, rezultă că T este contractant, adică are un singur punct fix $y \in E$. Cu alte cuvinte, există o singură soluție $y = y(x)$ definită pentru $x \geqslant 0$ și aparținînd spațiului E,

care verifică ecuația integrală (53). Cu aceasta demonstrația este încheiată. Mai facem observația că și în cazul de care ne-am ocupat, aproximațiile succesive definite prin (32) converg uniform pe orice interval compact la soluția $y = y(x)$ căutată.

1.2. SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE ORDINARE DE ORDINUL ÎNTÎI

Un astfel de sistem are forma:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n) \\ y_2'(x) &= f_2(x,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(x) &= f_n(x,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n), \end{aligned} \tag{62}$$

în care funcțiile $f_i = f_i(x,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n)$, $i = \overline{1,\ n}$ sînt definite într-un domeniu D din spațiul cu $n+1$ dimensiuni. Necunoscutele, ce urmează a fi determinate sînt funcțiile derivabile $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1,\ n}$.

Prin soluție particulară a sistemului (62) se înțelege o n-uplă de funcții $y_i = y_i(x)$, definite pe un anumit interval al axei reale și care verifică identic ecuațiile (62). În general, un astfel de sistem admite mai multe soluții; pentru a determina una anume, este necesar să dăm și condițiile inițiale $y_i(x_0) = y_i^0$, $i = \overline{1,\ n}$ sau cum se mai spune, să dăm punctul $(x_0,\ y_1^0,\ y_2^0, \ldots,\ y_n^0) \in D$ prin care trece soluția. Din punct de vedere geometric, o soluție particulară a sistemului (62) reprezintă o curbă în spațiul cu $n+1$ dimensiuni. Vom spune că sistemul (62) este dat în forma normală. Pentru a fi siguri de existența soluțiilor, vom impune anumite restricții funcțiilor f_i, $i = \overline{1,\ n}$.

Definiția 1.2. Vom spune că o funcție $f = f(x,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n)$ definită în domeniul D satisface condiția Lipschitz locală, dacă pentru orice punct $(x_0,\ y_1^0,\ y_2^0, \ldots,\ y_n^0) \in D$ există o vecinătate a

sa $V(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \subset D$ şi o constantă $L>0$, astfel încît inegalitatea

$$|f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)| \leqslant L \sum_{i=1}^{n} |y_i - \bar{y}_i| \tag{63}$$

are loc pentru orice pereche de puncte $(x, y_1, \ldots, y_n)$ şi $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ din V.

Vom spune că f satisface în D condiţia Lipschitz globală, dacă inegalitatea (63) are loc cu aceeaşi constantă L pentru orice pereche de puncte din D.

Scrierea vectorială a sistemelor de forma (62) face să dispară aproape orice deosebire dintre ecuaţie şi sistem. Orice teoremă formulată pentru ecuaţia (1) se transpune în mod foarte natural şi pentru sistemul (62). Vom nota cu y matricea cu n linii şi o coloană dată prin egalitatea $y^T=[y_1, y_2, \ldots, y_n]$. Dacă $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$, este o matrice oarecare, prin A^T vom nota transpusa ei. De asemenea, vom nota cu f matricea cu n linii şi o coloană, definită prin egalitatea $f^T=[f_1, f_2, \ldots, f_n]$. Vom folosi denumirea de vectori n-dimensionali pentru matricile de tipul $n\times 1$, adică pentru matricile cu n linii şi o coloană. Dacă elementele unui astfel de vector sînt funcţii de anumite variabile, vom spune că am definit o funcţie vectorială. În cazul de care ne ocupăm, vom scrie $y(x)$ pentru a pune în evidenţă că elementele y_i sînt funcţii $y_i(x)$ de variabila x şi păstrînd aceeaşi convenţie, vom scrie $f(x, y)$ pentru a sublinia că elementele f_i sînt funcţii de variabilele $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Dacă prin $y'(x)$ vom nota matricea (vectorul) obţinută din $y(x)$ prin derivarea fiecărui element, ceea ce prescurtat se scrie $(y'(x))^T=[y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)]$, atunci sistemul (62) poate fi scris în forma echivalentă

$$y'(x)=f(x, y), \tag{64}$$

care nu diferă formal cu nimic faţă de ecuaţia (1). Notaţia $y'(x)$ introdusă aici îşi găseşte justificarea şi în faptul că dacă definim pe mulţimea vectorilor norma euclidiană prin relaţia

$$\|y\|=(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)^{1/2}, \tag{65}$$

atunci putem scrie

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0} \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}, \tag{66}$$

convergenţa fiind înţeleasă în sensul normei introduse. Se poate constata imediat că un şir de vectori y^k, daţi de egalităţile

$$(y^k)^T=[y_1^k, y_2^k, \ldots, y_n^k], \qquad k=1, 2, 3, \ldots \tag{67}$$

converge în metrica euclidiană la un element y, dat prin egalitatea $y^T=[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, dacă şi numai dacă $y_i^k \to y_i$ pentru $k\to\infty$, oricare ar fi $i=1, 2, \ldots, n$. Aceasta decurge din inegalităţile evidente

$$|y_i^k-y_i| \leqslant \|y^k-y\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |y_i^k-y_i|. \tag{68}$$

Se introduce şi noţiunea de integrală definită a unei funcţii vectoriale $y=y(x)$ pe un interval finit $[a, b]$. Această mărime, notată prin simbolul $\int_a^b y(x)\mathrm{d}x$, se defineşte prin relaţia

$$\left(\int_a^b y(x)\mathrm{d}x\right)^T=\left[\int_a^b y_1(x)\mathrm{d}x, \int_a^b y_2(x)\mathrm{d}x, \ldots, \int_a^b y_n(x)\mathrm{d}x\right], \tag{69}$$

cu alte cuvinte, integrarea unei funcţii matriciale se face integrînd fiecare element pe $[a, b]$. Integrabilitatea unei funcţii matriciale este deci echivalentă cu integrabilitatea fiecărei componente.

Dacă $y=y(x)$ este o funcţie matricială continuă pe $[a, b]$, adică dacă toate elementele sale sînt continui pe $[a, b]$, se poate demonstra uşor că dacă $a<b$, atunci

$$\left\|\int_a^b y(x)\mathrm{d}x\right\| \leqslant \int_a^b \|y(x)\|\mathrm{d}x. \tag{70}$$

Definiţia 1.3. Vom spune că funcţia matricială $f=f(x, y)$ definită în domeniul D din spaţiul $n+1$ dimensional satisface în D condiţia Lipschitz locală, dacă pentru orice punct $(x_0, y^0)\in D$ există o vecinătate $V(x_0, y^0)\subset D$ şi o constantă $L>0$, astfel încît

$$\|f(x, y)-f(x, \bar{y})\| \leqslant L\|y-\bar{y}\|, \quad \forall (x, y), (x, \bar{y})\in V(x_0, y^0). \tag{71}$$

Dacă inegalitatea precedentă are loc cu aceeaşi constantă L pentru orice pereche de puncte (x, y) şi $(x, \bar{y})$ din D, vom spune că f satisface în D condiţia Lipschitz globală.

Se poate demonstra, pentru o funcție matricială oricare, că îndeplinirea condiției Lipschitz este echivalentă cu îndeplinirea aceleeași condiții de către fiecare componentă a ei, diferite fiind numai valorile constantelor care apar în aceste inegalități.

Teorema 1.4. *Presupunem că $f=f(x, y)$ este o funcție vectorială continuă în domeniul D din spațiul $n+1$ dimensional și că satisface acolo condiția Lipschitz locală. Atunci, oricare ar fi $(x_0, y^0)\in D$ există o singură soluție $y=y(x)$ a sistemului (64) cu condiția $y(x_0)=y^0$, definită într-o vecinătate suficient de mică a punctului x_0.*

Demonstrație. Prin y^0 am notat vectorul $[y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0]^T$. Condiția $y(x_0)=y^0$ înseamnă $y_1(x_0)=y_1^0, \ldots, y_n(x_0)=y_n^0$. Ca și în cazul scalar, se poate vedea și aici că sistemul (64) cu condiția $y(x_0)=y^0$ este echivalent cu sistemul

$$y(x)=y^0+\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt, \quad y=y(x) \text{ continuă.} \tag{72}$$

Presupunem că dreptunghiul $|x-x_0|\leqslant a$, $\|y-y^0\|\leqslant b$ este inclus în vecinătatea $V(x_0, y^0)$ care apare în condiția (71) și că M este marginea superioară a valorilor $\|f(x, y)\|$ pe dreptunghiul respectiv. Notăm prin I intervalul $|x-x_0|\leqslant h$, unde $h=min\{a, b/M\}$ și definim pe I șirul aproximațiilor succesive

$$y^0(x)=y^0, \quad y^{k+1}(x)=y^0+\int_{x_0}^{x} f(t, y^k(t))\,dt, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{73}$$

Observăm că toate aceste funcții sînt definite și continui pe I, au graficul în dreptunghiul $|x-x_0|\leqslant h$, $\|y-y^0\|\leqslant b$ și că are loc majorarea

$$\|y^{k+1}(x)-y^k(x)\|\leqslant b\frac{(L|x-x_0|)^k}{k!}, \quad x\in I, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{74}$$

De aici se deduce convergența uniformă pe I a șirului $(y^k(x))$ și trecînd la limita pentru $k\to\infty$ în relația de recurență (73), se obține că limita $y=y(x)$ a șirului aproximațiilor succesive satisface sistemul (72), adică este soluția căutată de noi. Unicitatea se arată la fel ca în cazul scalar. Mai observăm că dacă notăm $\varepsilon_k(x)=\|y(x)-y^k(x)\|$, găsim pentru $x\in I$ inegalitatea

$$\varepsilon_k(x)\leqslant\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}\leqslant\frac{M}{L}\frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{75}$$

care ne arată cît de repede converge la zero diferența dintre soluție și aproximanta de ordinul k.

Observație. Este evident caracterul local al acestei teoreme, care ne garantează existența soluției numai într-o vecinătate suficient de mică a punctului x_0. Se poate prelungi în ambele sensuri intervalul pe care există soluția $y=y(x)$ a sistemului (64) cu condiția $y(x_0)=y^0$, obținîndu-se o soluție saturată a acestui sistem. Graficele a două soluții saturate distincte, adică curbele respective din spațiul $n+1$ dimensional, nu au puncte comune în D căci, presupunînd că un astfel de punct $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ există, am contrazice rezultatul local de unicitate cuprins în teorema precedentă.

Teoremele 1.2 și 1.3 de existență globală a soluției rămîn valabile și în cazul sistemelor de ecuații (64), dar nu le mai reformulăm, deoarece aici mult mai important în aplicații se dovedește cazul liniar al acestor sisteme.

Un sistem liniar are forma generală următoare

$$\begin{aligned} y_1'(x)&=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+\ldots+a_{1n}(x)y_n+b_1(x)\\ y_2'(x)&=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+\ldots+a_{2n}(x)y_n+b_2(x)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n'(x)&=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+\ldots+a_{nn}(x)y_n+b_n(x), \end{aligned} \tag{76}$$

în care coeficienții $a_{ij}=a_{ij}(x), i, j=\overline{1, n}$ sînt funcții continui pe un interval (a, b) al axei reale. Termenii liberi $b_i=b_i(x), i=\overline{1, n}$, sînt de asemenea continui pe (a, b). Dacă considerăm matricea $A(x)=(a_{ij}(x)))$ și vector-funcția $b=b(x)$ ale căror elemente sînt funcțiile scalare de mai sus, sistemul (76) poate fi scris în forma echivalentă

$$y'(x)=A(x)y(x)+b(x), \qquad x\in(a, b). \tag{77}$$

O altă scriere condensată a sistemului (76) este următoarea

$$y_i'(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j+b_i(x), \quad i=\overline{1, n}. \tag{78}$$

Un rezultat care comportă o demonstrație elementară, referitor la sistemul (77) este

Teorema 1.5. *Oricare ar fi punctul $x_0\in(a, b)$ și oricare ar fi vectorul real y^0, există o singură soluție $y=y(x)$ a sistemului liniar (77), definită pe întreg intervalul (a, b) și satisfăcînd condiția $y(x_0)=y^0$.*

Demonstrație. Fie I un interval închis complet conținut în (a, b) și cuprinzînd punctul x_0. Construim aproximațiile succesive

$$y^0(x)=y^0,\quad y^{k+1}(x)=y^0+\int_{x_0}^{x}A(t)y^k(t)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}b(t)\mathrm{d}t,\quad x\in I \tag{79}$$

și arătăm că ele converg uniform pe I la soluția căutată. În adevăr, notînd cu $f(x, y)$ cantitatea $A(x)y+b(x)$, constatăm că avem pentru $x\in I$ și y oarecare

$$\|f(x, y)-f(x, \overline{y})\|\leqslant L\|y-\overline{y}\|, \tag{80}$$

unde $L=sup\|A(x)\|$ pentru $x\in I$, prin norma unei matrici de tipul $n\times n$ înțelegînd tot norma euclidiană, adică rădăcina pătrată din suma pătratelor tuturor elementelor sale. Dacă notăm

$$M_1=\sup\|y^1(x)-y^0\|,\ \text{pentru}\ x\in I \tag{81}$$

vom găsi majorarea

$$\|y^{k+1}(x)-y^k(x)\|\leqslant M_1\frac{(L|x-x_0|)^k}{k!},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{82}$$

care știm că atrage convergența uniformă pe I a șirului $(y^k(x))$ la soluția căutată. Deoarece intervalul I a fost luat arbitrar, rezultă că soluția căutată există pe întreg intervalul (a, b) și că în plus, ea satisface ecuația integrală

$$y(x)=y^0+\int_{x_0}^{x}A(t)y(t)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}b(t)\mathrm{d}t,\quad x\in(a,\ b) \tag{83}$$

Observație. Dacă $b(x)\equiv 0$, sistemul

$$y'(x)=A(x)y(x),\quad x\in(a,\ b) \tag{84}$$

se numește liniar omogen. I se mai spune uneori sistemul liniar omogen corespunzător sistemului (77). Vom enunța cîteva proprietăți simple ale sistemului (84).

Propoziția 1.1. *Dacă $y=y(x)$ este o soluție particulară pentru (84), atunci $cy(x)$ este de asemenea soluție, oricare ar fi constanta c.*

Demonstrație. Folosind scrierea vectorială, avem

$$(cy(x))'=cy'(x)=cA(x)y(x)=A(x)(cy(x)),\quad x\in(a,\ b). \tag{85}$$

Reamintim că produsul unui vector (matrice) cu o constantă se face înmulțind fiecare element al vectorului (matricii), cu acea constantă.

Propoziția 1.2. *Dacă $y=y^1(x)$ și $y=y^2(x)$ sînt soluții particulare ale sistemului (84), atunci $y^1(x)+y^2(x)$ este de asemenea soluție.*

Demonstrație. Vom avea

$$\begin{aligned}(y^1(x)+y^2(x))'&=(y^1(x))'+(y^2(x))'=A(x)y^1(x)+A(x)y^2(x)=\\&=A(x)(y^1(x)+y^2(x)),\end{aligned} \tag{86}$$

ceea ce exprimă tocmai faptul că $y^1(x)+y^2(x)$ verifică (84).

Propoziția 1.3. *Dacă $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^m(x)$ sînt soluții particulare ale sistemului (84), atunci*

$$y(x)=c_1y^1(x)+c_2y^2(x)+\ldots+c_my^m(x), \tag{87}$$

unde c_i, $i=\overline{1,\ m}$ sînt constante, este de asemenea soluție.

Afirmația aceasta rezultă din cele două propoziții precedente.

Prin wronskian a n soluții particulare $y^i(x)$, $i=\overline{1,\ n}$ ale sistemului (84) înțelegem funcția $W=W(x)$ dată de relația

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1^1(x) & y_1^2(x)\ldots y_1^n(x)\\ y_2^1(x) & y_2^2(x)\ldots y_2^n(x)\\ \\ y_n^1(x) & y_n^2(x)\ldots y_n^n(x)\end{vmatrix},\quad x\in(a,\ b). \tag{88}$$

Coloanele determinantului sînt vectorii $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^n(x)$. Se poate demonstra foarte ușor că oricare ar fi cele n soluții particulare ale lui (84), wronskianul lor este sau identic nul, sau diferit de zero în orice punct din (a, b). În adevăr, un calcul elementar arată că

$$W'(x)=(a_{11}(x)+\ldots+a_{nn}(x))W(x),\quad x\in(a,\ b) \tag{89}$$

și dacă fixăm un punct $x_0\in(a, b)$ și înmulțim egalitatea precedentă cu factorul $exp(-\int_{x_0}^{x}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\mathrm{d}t)$, găsim

$$(W(x)\,exp(-\int_{x_0}^{x}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\mathrm{d}t))'_x=0, \tag{90}$$

de unde se obține

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\,dt}, \quad x\in(a,\ b). \tag{91}$$

De aici, se vede clar că dacă $W=W(x)$ se anulează într-un punct, atunci el se anulează identic, iar dacă este diferit de zero într-un punct, atunci este peste tot diferit de zero.

Definiția 1.4. Vom spune că n soluții $y^i(x)$, $i=\overline{1,\ n}$ ale sistemului (84) sînt liniar independente, dacă relația

$$c_1y^1(x)+c_2y^2(x)+\ldots+c_ny^n(x)\equiv 0, \quad x\in(a,\ b) \tag{92}$$

poate avea loc numai pentru $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$. În caz contrar, cele n soluții se numesc liniar dependente.

Propoziția 1.4. *Condiția necesară și suficientă ca n soluții particulare ale sistemului* (84) *să fie liniar dependente, este ca wronskianul lor să fie identic nul. Prin urmare, condiția necesară și suficientă de independență este ca wronskianul să fie diferit de zero.*

Demonstrație. Presupunînd că cele n soluții sînt liniar dependente, găsim că are loc o relație (92), în care măcar un coeficient $c_i\neq 0$. Scriind pe larg această relație, se va obține:

$$\begin{aligned}
&c_1y_1^1(x)+c_2y_1^2(x)+\ldots+c_ny_1^n(x)=0\\
&c_1y_2^1(x)+c_2y_2^2(x)+\ldots+c_ny_2^n(x)=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_1y_n^1(x)+c_2y_n^2(x)+\ldots+c_ny_n^n(x)=0,
\end{aligned} \tag{93}$$

care interpretat ca un sistem algebric în necunoscutele c_i, $i=\overline{1,\ n}$, cu soluție nebanală, ne duce la concluzia că determinantul coeficienților este nul în orice punct $x\in(a,\ b)$. Dar aceasta înseamnă $W(x)\equiv 0$.

Reciproc, să presupunem că wronskianul celor n soluții particulare este identic nul. Fie x_0 un punct fixat din $(a,\ b)$ și să facem $x=x_0$ în sistemul (93). Determinantul coeficienților fiind $W(x_0)=0$, rezultă că va exista o soluție nebanală $c_1^*,\ c_2^*,\ \ldots,\ c_n^*$. Vector–funcția $y(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i^*y^i(x)$ va fi o soluție pentru (84), care satisface $y(x_0)=0$. Dar aceasta atrage $y(x)\equiv 0$ pe $(a,\ b)$, care nu

spune altceva decît că cele n soluții particulare $y^i(x)$, $i=\overline{1,\ n}$, sînt liniar dependente. Demonstrația este încheiată.

Propoziția 1.5. *Dacă $y^i(x)$, $i=\overline{1,\ n}$, sînt n soluții particulare liniar independente ale sistemului* (84), *atunci soluția sa generală va fi $y=c_1y^1+c_2y^2+\ldots+c_ny^n$.*

Demonstrație. Vom arăta că prin particularizarea constantelor arbitrare c_i, putem obține orice soluție a sistemului dat. În adevăr, fie $y=y(x)$ o soluție oarecare a lui (84) și x_0 un punct fixat în $(a,\ b)$. Să notăm cu y^0 vectorul $y(x_0)$ și să considerăm sistemul liniar algebric.

$$\begin{aligned}
&c_1y_1^1(x_0)+c_2y_1^2(x_0)+\ldots+c_ny_1^n(x_0)=y_1^0\\
&c_1y_2^1(x_0)+c_2y_2^2(x_0)+\ldots+c_ny_2^n(x_0)=y_2^0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_1y_n^1(x_0)+c_2y_n^2(x_0)+\ldots+c_ny_n^n(x_0)=y_n^0,
\end{aligned} \tag{94}$$

din care se pot afla univoc constantele c_i, $i=\overline{1,\ n}$, deoarece determinantul coeficienților necunoscutelor este nenul. Notînd cu c_i^*, $i=\overline{1,\ n}$, valorile acestor constante și cu y^* combinația liniară $c_1^*y^1+\ldots+c_n^*y^n$, care este soluție pentru (84), vedem din (94) că putem scrie $y^*(x_0)=y^0$. Ținînd seama de unicitatea soluției, rezultă $y^*(x)\equiv y(x)$, adică $y=y(x)$ se scrie ca o anumită combinație liniară de soluțiile $y^i(x)$, $i=\overline{1,\ n}$ și tocmai asta trebuia arătat.

Conținutul ultimei propoziții poate fi exprimat concis dacă vom folosi notația vectorială. Prin $Y=Y(x)$ vom nota matricea de tipul $n\times n$ ale cărei coloane sînt vectorii liniar independenți $y^1,\ y^2,\ \ldots,\ y^n$, soluții particulare pentru (84). Soluția generală a acestui sistem se va scrie atunci în forma

$$y(x)=Y(x)c, \quad \text{unde} \quad c^T=[c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n]. \tag{95}$$

Vom spune că c este un vector constant arbitrar. Vom căuta acum o soluție particulară $\tilde{y}(x)$ a sistemului liniar neomogen (77), de forma $\tilde{y}(x)=Y(x)u(x)$, în care $u=u(x)$ este un vector-funcție de tipul $n\times 1$, ale cărei elemente sînt funcții $u_i=u_i(x)$, $i=\overline{1,\ n}$, ce urmează a fi determinate. Condiția impusă va fi deci

$$Y'(x)u(x)+Y(x)u'(x)=A(x)Y(x)u(x)+b(x) \tag{96}$$

și dacă ținem seama că $Y'(x)=A(x)Y(x)$, rezultă

$$Y(x)u'(x)=b(x) \text{ sau } u'(x)=Y^{-1}(x)b(x), \tag{97}$$

unde prin $Y^{-1}(x)$ am notat inversa matricii nesingulare $Y(x)$. Dacă x_0 este un punct fixat din (a, b), vom obține

$$u(x)=\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)b(t)\mathrm{d}t,\ x\in(a,\ b), \tag{98}$$

luînd constantele de integrare egale cu zero. Prin urmare

$$\tilde{y}(x)=Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)b(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(t)b(t)\mathrm{d}t \tag{99}$$

este o soluție particulară a sistemului neomogen (77).

Propoziția 1.6. *Soluția generală a sistemului liniar neomogen* (77) *este suma dintre o soluție particulară a sa și soluția generală a sistemului liniar omogen* (84).

Demonstrație. Fie $\tilde{y}(x)$ o soluție particulară pentru (84), de exemplu cea dată de formula (99). Dacă $y=y(x)$ este o soluție oarecare pentru (77), notînd $z(x)=y(x)-\tilde{y}(x)$ găsim fără nici o dificultate că $z'(x)=A(x)z(x)$, adică $z=z(x)$ este o soluție pentru sistemul liniar omogen (84). Aceasta înseamnă, după cum s-a văzut, că există niște constante c_i, $i=\overline{1,\ n}$, astfel încît $z(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y^i(x)$ unde $y^i(x)$, $i=\overline{1,\ n}$, sînt n soluții liniar independente pentru (84). Prin urmare, am găsit niște constante c_i astfel încît

$$y(x)=\tilde{y}(x)+c_1y^1(x)+\ \ldots\ +c_ny^n(x),\ x\in(a,\ b) \tag{100}$$

și deoarece $y=y(x)$ era luată arbitrar, tragem concluzia că orice soluție pentru (77) este de această formă. Pe de altă parte, deoarece orice vector-funcție de forma (100) verifica sistemul (77), putem spune că soluția generală a sistemului liniar neomogen (77) coincide cu totalitatea funcțiilor de forma (100) și demonstrația este încheiată.

Putem spune acum că soluția generală a sistemului (77) este dată de expresia

$$y(x)=Y(x)c+\int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(t)b(t)\mathrm{d}t,\ x\in(a,b), \tag{101}$$

în care c este un vector constant arbitrar. Dacă dorim să scriem soluția care satisface condiția inițială $y(x_0)=y^0$, trebuie să avem

$$Y(x_0)c=y^0 \quad \text{sau} \quad c=Y^{-1}(x_0)y^0, \tag{102}$$

deci soluția căutată este

$$y(x)=Y(x)Y^{-1}(x_0)y^0+\int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(t)b(t)\mathrm{d}t,\ x\in(a,\ b). \tag{103}$$

Formula precedentă se mai numește și formula variației constantelor și va fi folosită la demonstrarea teoremelor de stabilitate.

Pentru a putea considera încheiată integrarea unui sistem diferențial neomogen, se impune cunoașterea matricii $Y=Y(x)$ sau cu alte cuvinte, cunoașterea a n soluții particulare liniar independente ale sistemului omogen (84). Aceasta nu este nici pe departe o treabă simplă și există o metodă generală pentru rezolvare, doar în cazul cînd matricea $A(t)=A=$constantă. Înainte de a ne ocupa de integrarea efectivă a sistemelor de forma $\dot{y}=Ay$ cu $A=$matrice constantă de tipul $n\times n$, să vedem ce devine formula (103) în acest caz concret. Vom avea nevoie pentru aceasta de cîteva chestiuni preliminare.

Vom spune că șirul de matrici constante (A_k) de tipul $n\times n$ este convergent, dacă există o matrice A de același tip, astfel încît

$$\lim_{k\to\infty}\|A_k-A\|=0. \tag{104}$$

Vom scrie în acest caz $\lim_{k\to\infty} A_k=A$ sau mai pe scurt, $A_k\to A$. Dacă scriem $A_k=(a_{ij}^k)$ și $A=(a_{ij})$, $i,\ j=\overline{1,\ n}$ și ținem seama de inegalitățile evidente

$$|a_{ij}^k-a_{ij}|\leqslant\|A_k-A\|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k-a_{ij})^2}\ , \tag{105}$$

rezultă că $A_k\to A$ este echivalent cu faptul că $a_{ij}^k\to a_{ij}$ pentru $k\to\infty$, oricare ar fi perechea de indici i și j fixați, $i,\ j=\overline{1,\ n}$.

Condiția necesară și suficientă de convergență a unui șir (A_k) de matrici este analoagă aceleia din cazul șirurilor numerice și se enunță astfel: pentru orice $\varepsilon>0$ există un număr natural $k(\varepsilon)$ astfel încît $||A_{k+p}-A_k||<\varepsilon$ pentru $k\geqslant k(\varepsilon)$ și p = număr natural arbitrar.

Dacă avem un șir (A_k) de matrici de tipul $n\times n$, putem considera șirul sumelor sale parțiale (S_k), unde $S_k=A_1+A_2+\ldots+A_k$. În felul acesta am definit o serie de matrici pe care o vom nota cu unul din simbolurile $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ sau $A_1+A_2+\ldots+A_k+\ldots$. Vom spune că seria este convergentă dacă șirul sumelor sale parțiale este convergent. În caz contrar, seria se numește divergentă. Dacă seria converge, vom defini suma ei ca limita șirului sumelor parțiale. Cu alte cuvinte, dacă $\lim_{k\to\infty} S_k=S$, vom spune că S este suma seriei și vom avea voie, în acest caz, să scriem relațiile următoare

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ sau } S=A_1+A_2+\ldots+A_k+\ldots. \tag{106}$$

La fel ca în cazul clasic al seriilor numerice, se poate arăta că dacă o serie de matrici converge absolut, adică dacă este convergentă seria $\sum_{k=1}^{\infty}||A_k||$, atunci seria converge în mod obișnuit, după definiția dată mai înainte.

Definiția 1.5. Dacă B este o matrice constantă de tipul $n\times n$, matricea e^B este dată de egalitatea

$$e^B=E+\frac{1}{1!}B+\frac{1}{2!}B^2+\ldots+\frac{1}{k!}B^k+\ldots, \tag{107}$$

unde prin E am notat matricea unitate de tipul $n\times n$, iar prin B^k am notat puterea k a matricii B. Se poate verifica ușor că seria (107) este absolut convergentă, deci convergentă și în mod obișnuit.

Aplicația $B\to e^B$ are multe din proprietățile funcției exponențiale de variabilă reală. Astfel, putem scrie

$$e^0=E,\ e^Be^C=e^{B+C},\ (e^B)^{-1}=e^{-B}, \tag{108}$$

unde prin 0 am notat matricea de tipul $n\times n$ cu toate elementele nule, B și C fiind două matrici oarecare de tip $n\times n$. Facem observația că e^B este nesingulară, oricare ar fi matricea B de tipul $n\times n$.

Dacă $A=(a_{ij})$ este o matrice constantă de tipul $n\times n$ și x este un număr real oarecare, luînd în (107) pe $B=Ax$, găsim

$$e^{Ax}=E+\frac{x}{1!}A+\frac{x^2}{2!}A^2+\ldots+\frac{x^k}{k!}A^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}A^k. \tag{109}$$

Seria obținută din (109) prin derivarea formală în raport cu x este

$$A+\frac{x}{1!}A^2+\ldots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^k+\ldots \tag{110}$$

și se vede ușor că ea converge (chiar absolut) și are ca sumă matricea Ae^{Ax}, deoarece sumele ei parțiale sînt sumele parțiale ale seriei (109), înmulțite la stînga cu A. Cazul de care ne ocupăm poate fi redus la cel al seriilor de puteri cu coeficienți numerici, unde se știe că este posibilă derivarea termen cu termen. De aici va rezulta că fiecare element al matricii e^{Ax} este suma unei serii de puteri ale variabilei x, serie convergentă pentru orice x real, iar dacă definim derivata unei matrici ca matricea obținută din cea inițială prin derivarea fiecărui element, putem scrie

$$(e^{Ax})'=Ae^{Ax} \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{Ax}=Ae^{Ax}. \tag{111}$$

Pe de altă parte, deoarece se poate verifica ușor că o matrice-funcție $Y=Y(x)$ de tipul $n\times n$, care satisface ecuația

$$Y'(x)=AY(x),\ x \text{ real} \tag{112}$$

are coloanele formate din soluții particulare ale sistemului $y'=Ay$, tragem concluzia că coloanele lui e^{Ax} sînt soluții particulare ale sistemului $y'(x)=Ay$. Deoarece matricea e^{Ax} este nesingulară, aceste n soluții particulare $y^1, y^2, \ldots, y^n$ sînt și liniar independente. Prin urmare, în formula (103) putem lua $Y(x)=e^{Ax}$ și obținem că soluția sistemului

$$y'=Ay+b(x), \qquad -\infty<x<\infty \tag{113}$$

care satisface condiția inițială $y(x_0)=y^0$, se scrie sub forma

$$y(x)=e^{A(x-x_0)}y^0+\int_{x_0}^{x}e^{A(x-t)}\,b(t)\mathrm{d}t, \quad -\infty<x<\infty. \tag{114}$$

Din punct de vedere formal, lucrurile se prezintă la fel ca în cazul ecuației scalare $y'=ay+b(x)$, unde a = constantă, iar $b(x)$ este o

funcție continuă. Soluția acestei ecuații, pentru care $y(x_0)=y_0$, este dată de

$$(115)\qquad y(x)=e^{a(x-x_0)}y_0+\int_{x_0}^{x}e^{a(x-t)}b(t)dt,\quad -\infty<x<\infty.$$

Totuși, această analogie nu ne este de prea mare folos, deoarece a obține matricea e^{Ax}, numită matricea fundamentală a sistemului $y'=Ay$ ca suma unei serii (109), nu este calea cea mai naturală de urmat. Obținerea unor expresii mai avantajoase pentru matricea fundamentală a unui sistem va fi posibilă după prezentarea unor chestiuni de algebră.

1.3. FUNCȚII DE MATRICI

Fie $A=(a_{ij})$, $i,\ j=\overline{1,\ n}$, o matrice oarecare, cu elementele reale sau complexe. Matricea $\lambda E-A$, în care λ este un parametru și E este matricea unitate de tipul $n\times n$, se numește matricea caracteristică a lui A. Determinantul matricii caracteristice

$$(116)\qquad P(\lambda)=det(\lambda E-A)$$

se numește polinomul caracteristic al matricii A. El este un polinom în variabila independentă λ. Ecuația $P(\lambda)=0$ se numește ecuația caracteristică, iar rădăcinile ei (reale sau complexe) se numesc rădăcinile caracteristice ale matricii A. Mulțimea rădăcinilor caracteristice formează spectrul matricii A, notat uneori prin $\sigma(A)$. Pentru orice matrice, spectrul este diferit de mulțimea vidă.

Dacă $q(\lambda)=b_0\lambda^m+b_1\lambda^{m-1}+\ldots+b_{m-1}\lambda+b_m$ este un polinom oarecare, cu coeficienți reali sau complecși, iar A este o matrice constantă de tipul $n\times n$, vom defini matricea $q(A)$ prin relația

$$(117)\qquad q(A)=b_0A^m+b_1A^{m-1}+\ldots+b_{m-1}A+b_mE.$$

Se poate demonstra că dacă A are rădăcinile caracteristice $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$, atunci $q(A)$ are rădăcinile caracteristice $q(\lambda_1)$, $q(\lambda_2),\ \ldots,\ q(\lambda_n)$. De asemenea, în algebra liniară se demonstrează

Teorema lui Hamilton-Cayley. *Orice matrice pătrată A verifică ecuația ei caracteristică, adică $P(A)=0$.*

Exemplu. Dacă luăm

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix},\ \text{atunci}\ P(\lambda)=det(\lambda E-A)=\lambda^2-4\lambda+5,$$

$$P(A)=A^2-4A+5E=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 8 & 7\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0.$$

Matricea asociată a lui $\lambda E-A$, adică matricea obținută din aceasta prin înlocuirea fiecărui element cu complementul său algebric, urmată de operația de transpunere, o vom nota $B(\lambda)$. Avem relațiile evidente

$$(118)\qquad (\lambda E-A)B(\lambda)=B(\lambda)(\lambda E-A)=P(\lambda)E.$$

Elementele lui $B(\lambda)$ sînt polinoame în λ, de grad cel mult egal cu $n-1$. Există o metodă de calculare a matricii $B(\lambda)$, în ipoteza că se cunoaște polinomul caracteristic $P(\lambda)$. Anume, să presupunem că

$$(119)\qquad P(\lambda)=\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}\ldots-p_n,$$

în care coeficienții p_i sînt cunoscuți. Diferența $P(\lambda)-P(\mu)$ se va împărți exact la $\lambda-\mu$ și coeficienții cîtului $\delta(\lambda,\ \mu)$ se pot afla prin regula lui Horner. Dacă notăm deci

$$(120)\qquad \frac{P(\lambda)-P(\mu)}{\lambda-\mu}=\delta(\lambda,\ \mu)=\lambda^{n-1}+b_1\lambda^{n-2}+\ldots+b_{n-1}$$

vom avea pentru coeficienți următoarea expresie

$$(121)\qquad b_k=\mu^k-p_1\mu^{k-1}-p_2\mu^{k-2}-\ldots-p_{k-1}\mu-p_k,\ k=\overline{1,\ n-1}.$$

Dacă în identitatea $P(\lambda)-P(\mu)=(\lambda-\mu)\delta(\lambda,\mu)$ înlocuim variabilele λ și μ prin matricile permutabile λE și A, avînd în vedere că $P(A)=0$ conform teoremei Hamilton-Cayley, obținem identitatea

$$(122)\qquad P(\lambda)E=(\lambda E-A)\,\delta(\lambda E,A),$$

care comparată cu (118) ne duce la concluzia că $B(\lambda)=\delta(\lambda E,\ A)$. Ținînd seama de (120), găsim pentru matricea $B(\lambda)$ următoarea expresie

$$(123)\qquad B(\lambda)=E\lambda^{n-1}+B_1\lambda^{n-2}+\ldots+B_{n-1},$$

în care matricile B_k se calculează după formula

$$B_k = A^k - p_1 A^{k-1} - p_2 A^{k-2} - \ldots - p_{k-1} A - p_k E, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{124}$$

Această formulă nu este prea comodă pentru calcule, dar, putem observa că deoarece la efectuarea împărțirii după regula lui Horner avem relația de recurență $b_k = \mu b_{k-1} - p_k$, $k = \overline{1, n-1}$ și $b_0 = 1$, vom putea calcula matricile B_k din aproape în aproape după relația

$$B_k = AB_{k-1} - p_k E, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad B_0 = E. \tag{125}$$

Mai mult chiar, deoarece pe de o parte restul împărțirii lui $P(\lambda) - P(\mu)$ la $\lambda - \mu$ este nul, iar pe de altă parte el este egal cu $\mu b_{n-1} - p_n - P(\mu)$, putem spune că acesta din urmă este un polinom identic nul în variabila independentă μ. Înlocuind pe μ cu matricea constantă A, rezultă deci

$$AB_{n-1} - p_n E - P(A) = 0 \text{ sau } AB_{n-1} - p_n E = 0. \tag{126}$$

Această ultimă formulă poate fi folosită pentru controlul calculelor, dar ea are și unele consecințe interesante. Așa de exemplu, dacă A este nesingulară, adică dacă $p_n \neq 0$, din (126) rezultă

$$AB_{n-1} = p_n E \text{ sau } A^{-1} = \frac{1}{p_n} B_{n-1}. \tag{127}$$

Prin urmare, avem aici și un algoritm de găsire a inversei unei matrici A nesingulare, atunci cînd îi cunoaștem polinomul caracteristic $P(\lambda)$. Este suficient să calculăm matricile B_k conform relației (125), B_{n-1} diferind doar printr-o constantă multiplicativă de inversa A^{-1}.

Presupunem că am folosit procedeul descris mai sus și am aflat matricea asociată $B(\lambda)$. Fie λ_0 o rădăcină caracteristică (se mai numește și valoare proprie sau autovaloare) a matricii A. Deoarece $P(\lambda_0) = 0$, din (118) rezultă că $(\lambda_0 E - A)B(\lambda_0) = 0$. Dacă b este o coloană nenulă a matricii $B(\lambda_0)$, evident că vom putea scrie

$$(\lambda_0 E - A)b = 0 \text{ sau } Ab = \lambda_0 b. \tag{128}$$

Concluzia este că găsirea matricii asociate $B(\lambda)$ poate servi și la găsirea vectorilor proprii corespunzători diverselor autovalori ale matricii A. Anume, dacă λ_0 este o autovaloare a matricii A, atunci orice coloană nenulă a matricii $B(\lambda_0)$ este vector propriu al matricii A, corespunzător autovalorii λ_0.

Găsirea matricii $B(\lambda)$ după formula (123), în care coeficienții matriciali B_k sînt dați de (125), se bazează pe cunoașterea polinomului caracteristic $P(\lambda)$ al matricii A. Fadeev a propus o metodă de calculare simultană a coeficienților lui $P(\lambda)$ și a matricii asociate $B(\lambda)$. Mai întîi vom reaminti că dacă

$$P(\lambda) = det(\lambda E - A) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \ldots - p_n \tag{129}$$

are rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (nu neapărat distincte), atunci făcînd notația

$$s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{130}$$

între coeficienții lui $P(\lambda)$ și sumele s_k au loc formulele lui Newton

$$kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} - \ldots - p_{k-1} s_1, \quad k = \overline{2, n}, \quad p_1 = s_1, \tag{131}$$

care ar permite calcularea din aproape în aproape a numerelor p_k, în ipoteza că sînt cunoscute $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Aceste sume se pot în adevăr calcula, plecînd de la observația că

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = p_1 = tr\, A, \tag{132}$$

unde prin $tr\, A$ am notat urma matricii A, adică suma elementelor de pe diagonala sa principală. Mai precis

$$tr\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}. \tag{133}$$

Deoarece $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ sînt rădăcinile caracteristice ale matricii A^k, după același raționament vom avea

$$s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k = tr\, A^k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{134}$$

Aceasta înseamnă că pentru a afla toate sumele s_k, ar trebui să calculăm toate puterile matricii A, de la 1 la n, și să aplicăm formula (134). Folosind apoi (131), am afla toți coeficienții polino-

mului caracteristic $P(\lambda)$, dar se vede că este necesar un volum mare de calcule.

Fadeev a propus următorul algoritm, care odată cu polinomul $P(\lambda)$ ne dă şi matricea asociată $B(\lambda)$. Se consideră următoarele formule:

$$A_1=A, \quad p_1=tr\,A_1, \quad B_1=A_1-p_1E$$

$$A_2=AB_1, \quad p_2=\frac{1}{2}tr\,A_2, \quad B_2=A_2-p_2E$$

(135) . . . . . .

$$A_{n-1}=AB_{n-2},\ p_{n-1}=\frac{1}{n-1}tr\,A_{n-1},\ B_{n-1}=A_{n-1}-p_{n-1}E$$

$$A_n=AB_{n-1},\ p_n=\frac{1}{n}tr\,A_n,\ B_n=A_n-p_nE.$$

Să demonstrăm că numerele p_k, $k=\overline{1,n}$, sînt în adevăr coeficienţii polinomului caracteristic $P(\lambda)$ al matricii A. Pentru aceasta, observăm că au loc relaţiile

(136) $A_k=A^k-p_1A^{k-1}-\ldots-p_{k-1}A,\ B_k=A^k-p_1A^{k-1}-\ldots$

$$\ldots-p_{k-1}A-p_kE,$$

iar dacă notăm $s_k=tr\,A^k$, $k=\overline{1,n}$, vedem din prima formulă (136) că putem scrie, egalînd urmele celor două matrici din egalitatea respectivă, că

(137) $kp_k=s_k-p_1s_{k-1}-\ldots-p_{k-1}s_1,\ k=\overline{2,n};\ p_1=s_1.$

Amintindu-ne de relaţiile lui Newton (131), vedem că numerele p_k obţinute prin procedeul (135) sînt în adevăr coeficienţii polinomului caracteristic al matricii A. Mai mult chiar, din a doua formulă (136), se vede că matricile B_k, $k=\overline{1,n-1}$, sînt coeficienţii matriciali ai lui $B(\lambda)$, deoarece ele coincid cu matricile B_k date de (124). După cum se ştie $B_n=0$ şi aceasta poate fi folosită pentru verificarea calculelor. Cu matricile B_k date de (135), putem deci scrie

(138) $B(\lambda)=E\lambda^{n-1}+B_1\lambda^{n-2}+\ldots+B_{n-2}\lambda+B_{n-1}.$

Exemplu

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\5&2&-2\\0&1&3\end{bmatrix},\ p_1=tr\,A=6,\ B_1=A-6E=\begin{bmatrix}-5&0&-1\\5&-4&-2\\0&1&-3\end{bmatrix}$$

$$A_2=AB_1=\begin{bmatrix}-5&-1&2\\-15&-10&-3\\5&-1&-11\end{bmatrix},\ p_2=\frac{1}{2}tr\,A_2=-13,$$

$$B_2=A_2+13E=\begin{bmatrix}8&-1&2\\-15&3&-3\\5&-1&2\end{bmatrix}$$

$$A_3=AB_2=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix},\ p_3=\frac{1}{3}tr\,A_3=3,\ B_3=A_3-3E=0.$$

Prin urmare $P(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+13\lambda-3$, iar pentru matricea asociată avem expresia

$$B(\lambda)=E\lambda^2+B_1\lambda+B_2=\begin{bmatrix}\lambda^2-5\lambda+8&-1&-\lambda+2\\5\lambda-15&\lambda^2-4\lambda+3&-2\lambda-3\\5&\lambda-1&\lambda^2-3\lambda+2\end{bmatrix}.$$

Mai putem calcula inversa lui A, din relaţia $AB_2=3E$; rezultă în mod evident că $A^{-1}=(1/3)B_2$, dar renunţăm să mai scriem pe larg. Mai general chiar, găsim $(\lambda E-A)^{-1}=(1/P(\lambda))B(\lambda)$, adevărată pentru orice λ care nu este autovaloare a matricii A.

Vom spune că un polinom $f(\lambda)$ este polinom anulant al matricii pătrate A, dacă $f(A)=0$.

Definiţia 1.6. Polinomul anulant $\psi(\lambda)$ de grad minim şi cu primul coeficient egal cu unitatea se numeşte polinom minimal al matricii A.

Din definiţie este clar că la căutarea polinomului minimal nu se ia în considerare polinomul identic nul. Pe de altă parte, este clar că pentru o matrice dată, există polinoame anulante neidentic nule. Ţinînd seama de teorema Hamilton-Cayley, un astfel de polinom este chiar polinomul caracteristic $P(\lambda)$ al matricii A. Mai putem face observaţia că orice polinom anulant al matricii A se divide cu polinomul minimal $\psi(\lambda)$. În adevăr, dacă

$f(\lambda)$ este un polinom pentru care $f(A)=0$, împărţindu-l la $\psi(\lambda)$ vom găsi $f(\lambda)=\psi(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$, unde gradul restului $r(\lambda)$ este mai mic decît gradul împărţitorului $\psi(\lambda)$. Înlocuind în această identitate pe λ cu matricea A şi avînd în vedere că $f(A)=q(A)=0$, vom găsi $r(A)=0$. Deoarece $\psi(\lambda)$ este polinom minimal, aceasta se poate numai dacă $r(\lambda)\equiv 0$, ceea ce înseamnă că $f(\lambda)$ se divide cu $\psi(\lambda)$.

Acum este clar că polinomul minimal al unei matrici A este unic. În adevăr, dacă $\varphi(\lambda)$ este şi el polinom minimal în sensul definiţiei date, este evident că gradul său este egal cu gradul lui $\psi(\lambda)$. Deoarece ambele aceste polinoame se divid unul cu celălalt şi au coeficienţii termenilor de gradul cel mai mare egali, ele sînt identice, adică $\varphi(\lambda)\equiv\psi(\lambda)$.

Dacă notăm cu $d(\lambda)$ cel mai mare divizor comun al elementelor matricii asociate $B(\lambda)$, avînd coeficientul termenului de grad maxim egal cu unitatea, observăm că polinomul caracteristic $P(\lambda)$ este divizibil cu $d(\lambda)$. Aceasta deoarece $d(\lambda)$ poate fi la fel de bine definit şi ca cel mai mare divizor comun al minorilor de ordinul $n-1$ din determinantul $P(\lambda)$, iar $P(\lambda)$ este o combinaţie de astfel de minori, dacă ne gîndim la regula dezvoltării unui determinant după elementele unei linii sau ale unei coloane. Se poate demonstra că polinomul minimal $\psi(\lambda)$ al unei matrici pătrate A se obţine după regula

$$\psi(\lambda)=\frac{P(\lambda)}{d(\lambda)}, \tag{139}$$

cu alte cuvinte $\psi(\lambda)$ este cîtul dintre polinomul caracteristic $P(\lambda)$ şi cel mai mare divizor comun al elementelor matricii asociate $B(\lambda)$. Dacă elementele matricii $B(\lambda)$ sînt prime între ele, atunci $d(\lambda)\equiv 1$ şi $\psi(\lambda)=P(\lambda)$, adică în acest caz polinomul minimal coincide cu polinomul caracteristic. Dar există cazuri cînd $\psi(\lambda)$ are gradul mai mic decît $P(\lambda)$.

Dacă scriem

$$B(\lambda)=d(\lambda)C(\lambda), \tag{140}$$

vom numi $C(\lambda)$ matricea asociată redusă a lui A; $C(\lambda)$ se obţine împărţind fiecare element al lui $B(\lambda)$ cu divizorul $d(\lambda)$. Împărţind ambii membri ai egalităţii $(\lambda E-A)B(\lambda)=P(\lambda)E$ cu polinomul $d(\lambda)$, vom obţine

$$(\lambda E-A)C(\lambda)=\psi(\lambda)E, \tag{141}$$

din care, dacă egalăm determinanţii, rezultă

$$P(\lambda)\ det\ C(\lambda)=(\psi(\lambda))^n, \tag{142}$$

unde bineînţeles, n este numărul de linii sau de coloane a matricii A despre care vorbim. Egalitatea precedentă ne spune că puterea n a polinomului minimal se divide cu $P(\lambda)$, ceea ce ne arată că $\psi(\lambda)$ are ca rădăcini toate rădăcinile distincte ale lui $P(\lambda)$. Cu alte cuvinte, dacă

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\dots(\lambda-\lambda_s)^{n_s};\ \lambda_i\neq\lambda_j \text{ şi } n_i>0, \tag{143}$$

atunci

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}; \tag{144}$$

unde

$$0<m_i\leqslant n_i,\quad i=\overline{1,s}.$$

O proprietate interesantă a matricii asociate reduse $C(\lambda)$ este şi următoarea: pentru orice λ, $C(\lambda)\neq 0$. În adevăr, dacă pentru o valoare $\lambda=\lambda_0$ am avea $C(\lambda_0)=0=$matricea cu toate elementele zero, ar însemna că toate elementele lui $C(\lambda)$, care sînt nişte polinoame de λ, se divid cu factorul $\lambda-\lambda_0$. Dar din modul cum a fost definită, noi ştim că elementele lui $C(\lambda)$ nu mai au factori comuni diferiţi de o constantă. Contradicţia obţinută ne arată că $C(\lambda)\neq 0$, oricare ar fi λ.

Dacă λ_0 este o autovaloare a matricii A, atunci $\psi(\lambda_0)=0$. Din formula (141) se deduce $(\lambda_0E-A)C(\lambda_0)=0$, iar dacă b este o coloană nenulă a matricii $C(\lambda_0)$, atunci din $(\lambda_0E-A)b=0$ găsim că $Ab=\lambda_0 b$, adică b este vector propriu al matricii A, corespunzător autovalorii $\lambda=\lambda_0$.

În sfîrşit, dacă observăm că diferenţa $\psi(\lambda)-\psi(\mu)$ se împarte exact la $\lambda-\mu$ şi notăm $\psi(\lambda)-\psi(\mu)=(\lambda-\mu)\varphi(\lambda,\mu)$, vom obţine prin înlocuirea lui λ şi μ cu matricile λE şi A, relaţia următoare

$$(\lambda E-A)\varphi(\lambda E, A)=\psi(\lambda)E \tag{145}$$

dacă avem în vedere că $\psi(A)=0$. Comparată cu (141), relaţia precedentă ne duce la concluzia că

$$C(\lambda)=\varphi(\lambda E, A), \tag{146}$$

ceea ce ne indică un mod de calculare pentru matricea asociată redusă $C(\lambda)$.

Exemplu. Să se calculeze polinomul caracteristic, matricea asociată și polinomul minimal, în cazul matricii

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Am putea afla simultan $P(\lambda)$ și $B(\lambda)$, folosind algoritmul lui Fadeev. Vom folosi însă cealaltă metodă, bazată pe cunoașterea polinomului caracteristic. Găsim $P(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3$. Pentru matricea asociată $B(\lambda)$, folosim expresia $B(\lambda)=\delta(\lambda E, A)$, unde

$$\delta(\lambda,\mu)=\frac{P(\lambda)-P(\mu)}{\lambda-\mu}=\mu^2+\mu(\lambda-6)+\lambda^2-6\lambda+12.$$

Avem deci

$$B(\lambda)=A^2+(\lambda-6)A+(\lambda^2-6\lambda+12)E=\begin{bmatrix} \lambda^2-6\lambda+8 & \lambda-2 & 0 \\ -4\lambda+8 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ -2\lambda+4 & \lambda-2 & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix},$$

Este evident că $d(\lambda)=\lambda-2$ și deci polinomul minimal $\psi(\lambda)$ este

$$\psi(\lambda)=\frac{P(\lambda)}{d(\lambda)}=(\lambda-2)^2.$$

Matricea asociată redusă este

$$C(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda-4 & 1 & 0 \\ -4 & \lambda & 0 \\ -2 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix},$$

Pentru autovaloarea $\lambda=2$, găsim vectorul propriu b dat de coloana a doua a matricii $C(2)$, adică $b^T=[1, 2, 1]$. Știind că $B(\lambda)=P(\lambda)\cdot(\lambda E-A)^{-1}$ și făcînd aici $\lambda=0$, găsim $A^{-1}=(1/8)B(0)$, adică pe larg

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Dacă $f(\lambda)$ este un polinom, cu coeficienți reali sau complecși, am văzut ce se înțelege prin matricea $f(A)$, unde A este o matrice pătrată oarecare. Ne vom ocupa în continuare de definirea funcțiilor de matrice în cazul general, stabilind și formule de calculare care se vor dovedi utile, mai ales la găsirea matricii fundamentale e^{At} a unui sistem diferențial liniar $y'=Ay$, problemă pe care am întîlnit-o în secțiunea precedentă a acestui capitol. De mare importanță se va dovedi, cu această ocazie, cunoașterea polinomului minimal al matricii A.

Propoziția 1.7. *Dacă matricea A are polinomul minimal*

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s} \tag{147}$$

iar $f(\lambda)$ și $g(\lambda)$ sînt două polinoame oarecare, atunci condiția necesară și suficientă ca $f(A)=g(A)$ este următoarea

$$f(\lambda_k)=g(\lambda_k),\ f'(\lambda_k)=g'(\lambda_k),\ldots,f^{(m_k-1)}(\lambda_k)=g^{(m_k-1)}(\lambda_k),\quad k=\overline{1,s}. \tag{148}$$

Demonstrație. Necesitatea: Dacă $f(A)=g(A)$, atunci notînd cu $h(\lambda)$ diferența $f(\lambda)-g(\lambda)$, vom avea $h(A)=0$. Dacă $h(\lambda)$ nu este identic nul, caz în care (148) sînt îndeplinite, atunci $h(\lambda)$ se divide cu polinomul minimal, adică $h(\lambda)=\psi(\lambda)\cdot h_1(\lambda)$ în care $h_1(\lambda)$ este un polinom. Dar în acest caz vom avea

$$h(\lambda_k)=0, h'(\lambda_k)=0,\ldots,h^{(m_k-1)}(\lambda_k)=0,\quad k=\overline{1,s}, \tag{149}$$

care ne arată că (148) este din nou îndeplinită. Suficiența: Dacă presupunem că (148) sînt verificate, atunci au loc și (149), care ne spun că $h(\lambda)$ admite rădăcinile λ_k cu multiplicitățile m_k, $k=\overline{1,s}$, adică $h(\lambda)$ se divide cu $\psi(\lambda)$. Aceasta implică $h(A)=0$, adică $f(A)=g(A)$ și cu aceasta demonstrația se încheie.

Dacă $f=f(\lambda)$ nu este polinom, dar are derivatele respective în o mulțime ce include autovalorile (spectrul) matricii A, iar $g(\lambda)$ este un polinom astfel încît (148) sînt îndeplinite, punem prin definiție $f(A)=g(A)$. Justificarea acestei definiții o constituie tocmai propoziția 1.7. În felul acesta am extins definirea matricii $f(A)$, pentru o clasă destul de largă de funcții de variabila complexă λ.

Se pune acum problema alegerii cît mai convenabile a polinomului $g(\lambda)$, pentru care să aibă loc relațiile (148). Scopul nostru

este să-l alegem pe $g(\lambda)$ de grad minim. Vom demonstra că dată o funcție $f=f(\lambda)$, există un singur polinom de grad mai mic decît gradul polinomului minimal $\psi(\lambda)$, care să îndeplinească condițiile (148). Că nu pot exista două astfel de polinoame, este evident. În adevăr, dacă $g_1(\lambda)$ și $g_2(\lambda)$ de grad mai mic decît gradul lui $\psi(\lambda)$ ar satisface (148) pentru o funcție $f=f(\lambda)$ dată, ar însemna că diferența lor se divide cu $\psi(\lambda)$. Dar deoarece această diferență are și ea gradul mai mic decît gradul lui $\psi(\lambda)$, aceasta implică $g_1(\lambda)-g_2(\lambda)\equiv 0$, adică cele două polinoame coincid.

Dată o funcție $f=f(\lambda)$, problema găsirii unui polinom $r=r(\lambda)$ care să satisfacă condițiile

$$(150)\quad f(\lambda_k)=r(\lambda_k),\quad f'(\lambda_k)=r'(\lambda_k),\ \ldots,\ f^{(m_k-1)}(\lambda_k)=r^{(m_k-1)}(\lambda_k),\qquad k=\overline{1,s},$$

unde λ_k sînt numere distincte, reale sau complexe, este o problemă de interpolare, care se tratează în analiza numerică, independent de chestiunile referitoare la matrici, ce fac obiectul acestei secțiuni a cărții. Dacă notăm $m_1+m_2+\ldots+m_s=m$, putem da următoarea definiție.

Definiție 1.7. Polinomul $r=r(\lambda)$ (unic determinat) de grad $<m$, care satisface condițiile (150), se numește polinomul de interpolare Lagrange-Sylvester al funcției $f=f(\lambda)$.

Să analizăm în contextul care ne interesează, diferitele situații ce se pot ivi, în raport cu forma polinomului minimal $\psi(\lambda)$, situații din care se va vedea că polinomul $r(\lambda)$ există totdeauna.

a) Să presupunem că polinomul minimal al matricii A are rădăcinile simple

$$(151)\qquad \psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_m),\quad m\leqslant n.$$

În acest caz, condițiile (150) iau forma

$$(152)\qquad f(\lambda_1)=r(\lambda_1),\ f(\lambda_2)=r(\lambda_2),\ \ldots,\ f(\lambda_m)=r(\lambda_m),$$

iar $r(\lambda)$ este în acest caz polinomul de interpolare al lui Lagrange

$$(153)\quad r(\lambda)=\sum_{k=1}^{m}\frac{(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_{k-1})(\lambda-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda-\lambda_m)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_m)}f(\lambda_k).$$

Se vede că gradul lui $r(\lambda)$ este cel mult $m-1$. Există cazuri cînd gradul lui $r(\lambda)$ este efectiv mai mic decît $m-1$, căci se poate ca

în suma (153) să se reducă termenii ce conțin pe λ la puterea maximă.

Conform definiției, $f(A)=r(A)$ deci vom avea

$$(154)\quad f(A)=\sum_{k=1}^{m}\frac{(A-\lambda_1E)\ldots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\ldots(A-\lambda_mE)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_m)}f(\lambda_k).$$

Această expresie nu este cîtuși de puțin comodă pentru calcule în cazuri concrete, dar este totuși folositoare. Astfel, observăm că numitorul fracției din (154) este $\psi'(\lambda_k)$. Mai important însă, produsul de matrici de la numărătorul fracției se dovedește a fi egal cu $C(\lambda_k)$, unde bineînțeles prin $C(\lambda)$ am notat matricea asociată redusă a lui A. Pentru a justifica aceasta, să ne amintim de formula (146), care ne spune că $C(\lambda_k)=\varphi(\lambda_kE, A)$, unde $\varphi(\lambda, \mu)$ este raportul diferențelor $\varphi(\lambda)-\psi(\mu)$ și $\lambda-\mu$. Luînd $\mu=\lambda_k$, găsim

$$(155)\qquad \varphi(\lambda, \lambda_k)=\frac{\psi(\lambda)-\psi(\lambda_k)}{\lambda-\lambda_k}=\frac{\psi(\lambda)}{\lambda-\lambda_k}=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m}(\lambda-\lambda_i).$$

Înlocuind în această ultimă identitate variabila scalară λ cu matricea A, găsim

$$(156)\qquad \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m}(A-\lambda_iE)=\varphi(A, \lambda_kE)=\varphi(\lambda_kE, A)=C(\lambda_k).$$

Avînd în vedere cele spuse, putem enunța

Teorema 1.6. *Dacă polinomul minimal al matricii A are forma* (151), *adică are rădăcinile simple, iar $f=f(\lambda)$ este o funcție scalară oarecare, atunci*

$$(157)\qquad f(A)=\sum_{k=1}^{m}\frac{C(\lambda_k)}{\psi'(\lambda_k)}f(\lambda_k),$$

unde $C(\lambda)$ este matricea asociată redusă a lui A.

În particular, dacă A are toate rădăcinile simple $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, atunci polinomul minimal coincide cu polinomul caracteristic $P(\lambda)$, iar $C(\lambda)$ coincide cu matricea asociată $B(\lambda)$, deci putem enunța următorul

Corolar. *Dacă matricea A are toate rădăcinile caracteristice simple, iar $f=f(\lambda)$ este o funcție scalară, atunci*

$$f(A)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B(\lambda_k)}{P'(\lambda_k)}f(\lambda_k). \tag{158}$$

Din cele spuse se vede importanța algoritmilor de determinare a matricii asociate.

Exemplu. Să luăm matricea

$$A=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

și funcția $f(\lambda)=e^{\lambda t}$, în care λ este variabila independentă, iar t este un parametru. În acest caz vom avea $P(\lambda)=det\,(\lambda E-A)=(\lambda+1)(\lambda-5)$, adică $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=5$. De asemenea, $P'(-1)=-6$, $P'(5)=6$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -4\\ -2 & \lambda-1\end{bmatrix},\quad B(-1)=\begin{bmatrix}-4 & -4\\ -2 & -2\end{bmatrix},\quad B(5)=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -2 & 4\end{bmatrix}.$$

Conform cu (158), vom scrie

$$e^{At}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-4 & -4\\ -2 & -2\end{bmatrix}e^{-t}+\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & -4\\ -2 & 4\end{bmatrix}e^{5t},$$

sau în altă formă

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{5t} & \frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{5t}\\ \frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{5t}\end{bmatrix}.$$

După ce vom demonstra că matricea e^{At}, găsită mai sus, coincide cu cea dată de seria (109), vom avea dreptul să afirmăm că ea este matricea fundamentală a sistemului liniar omogen

$$\frac{dy_1}{dt}=y_1-4y_2,\quad \frac{dy_2}{dt}=-2y_1+3y_2.$$

În diverse cazuri concrete, atunci cînd polinomul minimal are rădăcinile simple, adică are forma (151'), se poate proceda și altfel

pentru aflarea polinomului de interpolare Lagrange, scriindu-l de la început în forma

$$r(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\ldots+\alpha_{m-1}\lambda^{m-1} \tag{159}$$

și determinîndu-i coeficienții din condițiile (152), care în cazul de față se reduc la sistemul liniar de m ecuații cu m necunoscute

$$\alpha_0+\alpha_1\lambda_k+\alpha_2\lambda^2{}_k+\ldots+\alpha_{m-1}\lambda_k^{m-1}=f(\lambda_k),\ k=\overline{1,m}. \tag{160}$$

Sistemul are soluție unică, deoarece determinantul necunoscutelor este $\neq 0$, fiind de tip Vandermonde. Scriindu-l în forma matricială

$$\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{m-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{m-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \ldots & \lambda_m^{m-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{m-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(\lambda_1)\\ f(\lambda_2)\\ \vdots\\ f(\lambda_m)\end{bmatrix} \tag{161}$$

și înmulțind la stînga în ambii membri cu inversa matricii V de tip Vandermonde, găsim

$$\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{m-1}\end{bmatrix}=V^{-1}\begin{bmatrix}f(\lambda_1)\\ f(\lambda_2)\\ \vdots\\ f(\lambda_m)\end{bmatrix}. \tag{162}$$

După efectuarea calculelor și găsirea coeficienților α_i, $i=\overline{0,m-1}$, vom scrie

$$f(A)=\alpha_0E+\alpha_1A+\alpha_2A^2+\ldots+\alpha_{m-1}A^{m-1}. \tag{163}$$

Procedeul descris se poate aplica cu succes, dacă m nu este prea mare.

Exemplu. Să se calculeze matricea e^{At}, unde

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Funcția scalară este $f(\lambda)=e^{\lambda t}$, unde t este un parametru. Găsim $\psi(\lambda)=P(\lambda)=\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)$, deci $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$. Condiția (162) este în cazul de față

$$\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -4\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ e^{2t}\\ e^{-t}\end{bmatrix},$$

de unde se obțin valorile

$$\alpha_0=1,\ \alpha_1=\frac{1}{6}(3+e^{2t}-4e^{-t}),\ \alpha_2=\frac{1}{6}(-3+e^{2t}+2e^{-t}).$$

Din (163) se deduce că

$$e^{At}=\alpha_0 E+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2,$$

iar după efectuarea tuturor calculelor ajungem la rezultatul final

$$e^{At}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t} & 1-e^{2t} & \frac{3}{2}-\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{4}{3}e^{-t}\\ -\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t} & 1-e^{-t}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{2}{3}e^{-t} & 1-\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{2}{3}e^{-t} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{2t}+\frac{4}{3}e^{-t}\end{bmatrix}$$

b) Să trecem la cazul general, adică să presupunem că polinomul minimal al matricii A are și rădăcini multiple, adică este de forma știută

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}, \tag{164}$$

în care măcar unul din exponenții m_i este mai mare decît 1. După cum știm, polinomul de interpolare Lagrange-Sylvester, notat $r(\lambda)$, trebuie să satisfacă (150) și să aibă gradul mai mic decît m=gradul lui $\psi(\lambda)$. Un polinom de gradul $m-1$ are m coeficienți, iar condițiile (150) sînt de asemenea în număr total de m, sistemul din care trebuie să aflăm coeficienții lui $r(\lambda)$ fiind compatibil și avînd soluție unică. Problema care se pune este de a exprima cît mai convenabil polinomul de interpolare $r(\lambda)$, corespunzător unei funcții scalare $f=f(\lambda)$, definită și avînd derivatele necesare într-o mulțime care conține spectrul matricii A.

Se știe că fracția rațională $r(\lambda)/\psi(\lambda)$ admite o descompunere unică în fracții simple de forma următoare

$$\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)}=\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\alpha_{k1}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}+\frac{\alpha_{k2}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k-1}}+\dots+\frac{\alpha_{k,m_k}}{\lambda-\lambda_k}\right]. \tag{165}$$

Dacă am reuși să aflăm acești coeficienți α_{ki}, $k=\overline{1,s}$, $i=\overline{1,m_k}$, am putea spune că $r(\lambda)$ este cunoscut. În acest scop, să observăm că dacă facem notația

$$\psi_k(\lambda)=\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}},\qquad k=\overline{1,s}, \tag{166}$$

$\psi_k(\lambda)$ este un polinom care nu se mai anulează în $\lambda=\lambda_k$ și din (165) rezultă

$$r(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}[\alpha_{k1}+\alpha_{k2}(\lambda-\lambda_k)+\dots+\alpha_{k,m_k}(\lambda-\lambda_k)^{m_k-1}]\psi_k(\lambda). \tag{167}$$

Dacă fixăm un indice k în relația precedentă, prin împărțirea cu polinomul $\psi_k(\lambda)$, găsim

$$\frac{r(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}=\alpha_{k1}+\alpha_{k2}(\lambda-\lambda_k)+\dots+\alpha_{k,m_k}(\lambda-\lambda_k)^{m_k-1}+ \\ +(\lambda-\lambda_k)^{m_k}\cdot q(\lambda), \tag{168}$$

unde $q(\lambda)$ este o fracție rațională al cărei numitor nu se anulează în $\lambda=\lambda_k$. Dînd lui λ valoarea λ_k, aflăm coeficientul α_{k1}; mai general, prin derivarea de $i-1$ ori a relației precedente și înlocuirea lui λ cu valoarea λ_k, găsim formula

$$\alpha_{ki}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{d\lambda^{i-1}}\left[\frac{r(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{d\lambda^{i-1}}\left[\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}, \tag{169}$$

unde i ia toate valorile de la 1 la m_k. Am avut voie să înlocuim derivatele fracției r/ψ_k cu derivatele fracției f/ψ_k, în baza relațiilor (150) pe care le satisface polinomul de interpolare. Precizăm că nu este vorba de identitatea derivatelor la care ne referim, ci numai de egalitatea lor în punctul $\lambda=\lambda_k$. Formulele (169) ne dau valorile tuturor coeficienților care apar în (167), putînd acum scrie expresia polinomului de interpolare

$$r(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m_k}\frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(i-1)}_{\lambda=\lambda_k}(\lambda-\lambda_k)^{i-1}\psi_k(\lambda). \tag{170}$$

De fapt, în formula precedentă nu este exclus ca toți $m_k=1$, caz în care se regăsește de mai sus expresia (153) a polinomului de interpolare Lagrange.

Dacă înlocuim valorile coeficienților (169) în (167) și punem în evidență valorile lui $f(\lambda)$ și ale derivatelor sale, vom observa că putem scrie

$$(171)\qquad r(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}[f(\lambda_k)\varphi_{k1}(\lambda)+f'(\lambda_k)\varphi_{k2}(\lambda)+\ldots+$$
$$+f^{(m_k-1)}(\lambda_k)\varphi_{k,\,m_k}(\lambda)],$$

în care $\varphi_{ki}(\lambda)$ sînt niște polinoame în variabila λ, de grad mai mic decît m=gradul polinomului minimal. Aceste polinoame $\varphi_{ki}(\lambda)$ nu depind în nici un fel de funcția $f(\lambda)$, ci depind numai de polinomul minimal $\psi(\lambda)$ adică, în ultimă instanță, depind numai de matricea A.

Propoziția 1.8. *Polinoamele* $\varphi_{ki}(\lambda)$, $k=\overline{1,s}$, $i=\overline{1,m_k}$, *sînt liniar independente.*

Demonstrație. Presupunem că avem o combinație liniară identic nulă a acestor polinoame

$$(172)\qquad \sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m_k}c_{ki}\varphi_{ki}(\lambda)=0.$$

Căutînd un polinom de interpolare $r(\lambda)$ care să satisfacă condițiile

$$(173)\quad r(\lambda_k)=c_{k1},\ r'(\lambda_k)=c_{k2},\ \ldots,\ r^{(m_k-1)}(\lambda_k)=c_{k,m_k},\quad k=\overline{1,s}$$

am găsi în acord cu (171) că

$$(174)\qquad r(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m_k}c_{ki}\varphi_{ki}(\lambda).$$

Ținînd seama de (172), rezultă $r(\lambda)\equiv 0$ și din (173) tragem concluzia că toți coeficienții $c_{ki}=0$. Cu alte cuvinte, polinoamele $\varphi_{ki}(\lambda)$ sînt liniar independente, Q.E.D.

Făcînd notația

$$(175)\qquad \varphi_{ki}(A)=Z_{ki},\quad k=\overline{1,s},\quad i=\overline{1,m_k}$$

matricile Z_{ki}, care sînt în număr de m=gradul polinomului minimal $\psi(\lambda)$, nu vor depinde de funcția $f=f(\lambda)$, ci vor fi perfect determinate de matricea A. Ele se numesc dealtfel matricile componente sau componentele matriciale ale lui A.

Propoziția 1.9. *Componentele matriciale* Z_{ki} *ale unei matrici date sînt liniar independente.*

Demonstrație. Presupunem că avem o combinație liniară nulă a acestor matrici

$$(176)\qquad \sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m_k}c_{ki}Z_{ki}=0$$

Și fie $q(\lambda)$ polinomul de grad mai mic decît m

$$(177)\qquad q(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m_k}c_{ki}\varphi_{ki}(\lambda).$$

În baza lui (175), avem $q(A)=0$, dacă ținem seama și de (176). Deoarece $q(\lambda)$ are gradul mai mic decît al polinomului minimal, rezultă $q(\lambda)\equiv 0$. Deoarece polinoamele $\varphi_{ki}(\lambda)$ sînt liniar independente, rezultă toți $c_{ki}=0$, ceea ce înseamnă că matricile Z_{ki} sînt liniar independente, Q.E.D.

Dacă $f=f(\lambda)$ este o funcție scalară, ținînd seama de expresia (171) a polinomului $r(\lambda)$, rezultă că

$$(178)\quad f(A)=\sum_{k=1}^{s}[f(\lambda_k)Z_{k1}+f'(\lambda_k)Z_{k2}+\ldots+f^{(m_k-1)}(\lambda_k)Z_{k,m_k}],$$

care ne spune acuma că totul revine la aflarea componentelor matriciale Z_{ki} ale lui A. Pentru aceasta există un procedeu ingenios, bazat pe alegerea convenabilă a funcției $f(\lambda)$ și pe faptul că Z_{ki} nu depind de funcția aleasă. Să luăm funcția $f(t)=1/(\lambda-t)$, în care t este variabila independentă, iar λ este un parametru. Deoarece $f(t)(\lambda-t)=1$, înlocuind t cu A și constantele cu matricea unitate înmulțită cu constanta respectivă, vom găsi relația $f(A)(\lambda E-A)=E$, din care tragem concluzia că $f(A)=(\lambda E-A)^{-1}$. Pe de altă parte, deoarece $f^{(i)}(\lambda_k)=(i-1)!(\lambda-\lambda_k)^{-i-1}$, $k=\overline{1,s}$, $i=\overline{1,m_k}$ vom obține după înlocuirea în (178) că

$$(179)\quad (\lambda E-A)^{-1}=\frac{C(\lambda)}{\psi(\lambda)}=\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{Z_{k1}}{\lambda-\lambda_k}+\frac{1!\,Z_{k2}}{(\lambda-\lambda_k)^2}+\ldots+\frac{(m_k-1)!\,Z_{k,m_k}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}\right],$$

unde bineînțeles $C(\lambda)$ este matricea asociată redusă a lui A. Judecînd exact la fel ca la deducerea coeficienților α_{ki} din formula (165), vom obține pentru coeficientul matricial $(i-1)!Z_{ki}$ o formulă analoagă cu (169) și anume

$$(180)\qquad (i-1)!Z_{ki}=\frac{1}{(m_k-i)!}\left[\frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(m_k-i)}_{\lambda=\lambda_k},\ k=\overline{1,s},\ i=\overline{1,m_k},$$

unde $\psi_k(\lambda)$ are semnificația știută. Dacă înlocuim valorile aflate pentru componentele matriciale în formula de bază (178), putem scrie

$$(181)\qquad f(A)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m_k}\frac{f^{(i-1)}(\lambda_k)}{(m_k-i)!(i-1)!}\left[\frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(m_k-i)}_{\lambda=\lambda_k}.$$

Dacă vom observa că

$$(182)\qquad \frac{1}{(m_k-i)!(i-1)!}=\frac{1}{(m_k-1)!}C^{i-1}_{m_k-1},\ i=\overline{1,m_k},$$

atunci vom avea dreptul să scriem

$$(183)\qquad \sum_{i=1}^{m_k}\frac{f^{(i-1)}(\lambda_k)}{(m_k-i)!(i-1)!}\left[\frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(m_k-i)}_{\lambda=\lambda_k}=\frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{(f(\lambda)C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(m_k-1)}_{\lambda=\lambda_k},$$

În concluzie, putem spune că am demonstrat

Teorema 1.7. *Dacă polinomul minimal al matricii A are forma* (164), *adică are și rădăcini multiple, iar $f=f(\lambda)$ este o funcție scalară oarecare, atunci*

$$(184)\qquad f(A)=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{f(\lambda)C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(m_k-1)}_{\lambda=\lambda_k},$$

unde $C(\lambda)$ este matricea asociată redusă a lui A.

De fapt, formula precedentă este valabilă (cu atît mai mult) și dacă toți $m_k=1$, caz în care ea se reduce la formula cunoscută (157). Deoarece este evident că

$$(185)\qquad \frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}=\frac{d(\lambda)C(\lambda)}{d(\lambda)\psi_k(\lambda)}=\frac{B(\lambda)}{P_k(\lambda)},\ \text{unde } P_k(\lambda)=\frac{P(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}},$$

putem scrie o expresie pentru $f(A)$, în care să apară matricea asociată $B(\lambda)$ și anume

$$(186)\qquad f(A)=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{f(\lambda)B(\lambda)}{P_k(\lambda)}\right]^{(m_k-1)}_{\lambda=\lambda_k},$$

care în cazul cînd toți $m_k=1$, se reduce la expresia cunoscută (158).

Observație importantă. Atragem atenția că în formula precedentă, m_k nu este multiplicitatea rădăcinii λ_k în polinomul caracteristic, ci multiplicitatea ei în polinomul minimal $\psi(\lambda)$. Totuși fracția $B(\lambda)/P_k(\lambda)$ nu are singularitate în $\lambda=\lambda_k$, așa cum rezultă clar din (185).

Aplicație. Să luăm din nou matricea

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{bmatrix},$$

pentru care am găsit $\psi(\lambda)=(\lambda-2)^2$ și matricea asociată redusă

$$C(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-4&1&0\\-4&\lambda&0\\-2&1&\lambda-2\end{bmatrix}$$

și să calculăm matricea e^{At}, unde t este un parametru real sau complex. În cazul de față, $f(\lambda)=e^{\lambda t}$ și $\lambda_1=2$ cu $m_1=2$ este singura rădăcină a polinomului minimal. După ce vom observa că $\psi_1(\lambda)=1$ în cazul de față, vom aplica formula (184), găsind

$$e^{At}=\frac{1}{1!}\begin{bmatrix}(\lambda-4)e^{\lambda t}&e^{\lambda t}&0\\-4\,e^{\lambda t}&\lambda e^{\lambda t}&0\\-2\,e^{\lambda t}&e^{\lambda t}&(\lambda-2)e^{\lambda t}\end{bmatrix}'_{\lambda=2}.$$

După derivarea în raport cu λ, element cu element, și înlocuirea lui λ cu 2, găsim în final că

$$e^{At}=\begin{bmatrix}(1-2t)e^{2t}&te^{2t}&0\\-4te^{2t}&(1+2t)e^{2t}&0\\-2te^{2t}&te^{2t}&e^{2t}\end{bmatrix}.$$

După cum știm, aceasta va fi matricea fundamentală a sistemului diferențial liniar

$$\frac{dy_1}{dt}=y_2,\quad \frac{dy_2}{dt}=-4y_1+4y_2,\quad \frac{dy_3}{dt}=-2y_1+y_2+2y_3.$$

Metoda de găsire a matricii $f(A)$, bazată pe Teorema 1.7 (Lagrange-Sylvester), presupune cunoscută matricea asociată redusă $C(\lambda)$. Aceasta s-a văzut clar și din exemplul precedent. Tot în ipoteza cunoașterii lui $C(\lambda)$, se poate însă proceda și altfel, aflînd componentele matriciale Z_{ki} ale matricii date A și folosind apoi formula (178). Pentru determinarea efectivă a matricilor Z_{ki}, există formula (180), pe care o putem scrie în forma echivalentă

$$(187)\quad Z_{ki}=\frac{1}{(i-1)!(m_k-i)!}\left[\frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(m_k-i)}_{\lambda=\lambda_k},\quad k=\overline{1,s},\quad i=\overline{1,m_k},$$

dar pe care vom evita să o aplicăm în mod mecanic, nefiind nevoie de așa ceva, după cum se va vedea și din exemplul care urmează. Ne vom referi direct la formula (179) pentru calcularea matricilor Z_{ki}.

Exemplu. Pentru matricea

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

se găsește ușor $\psi(\lambda)=P(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, precum și

$$C(\lambda)=B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2-3\lambda+1 & -\lambda+1 & \lambda\\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 & -\lambda+2\\ -1 & -\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+2\end{bmatrix}.$$

Scriind dezvoltarea (179), vom avea

$$(188)\quad \frac{C(\lambda)}{\psi(\lambda)}=\frac{Z_{11}}{\lambda-1}+\frac{Z_{12}}{(\lambda-1)^2}+\frac{Z_{21}}{\lambda-2}.$$

Este un simplu exercițiu să aflăm de aici cele 3 matrici care ne interesează, fără a face apel la nici o teorie. Înmulțind identitatea cu $\lambda-2$ și făcînd apoi $\lambda=2$ în egalitatea găsită, aflăm pe Z_{21}

$$Z_{21}=\left[\frac{C(\lambda)}{(\lambda-1)^2}\right]_{\lambda=2}=C(2)=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Înmulțind cu $(\lambda-1)^2$ și dînd apoi lui λ valoarea 1, aflăm pe Z_{12}

$$Z_{12}=\left[\frac{C(\lambda)}{\lambda-2}\right]'_{\lambda=1}=-C(1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

În fine, pentru aflarea lui Z_{11}, vom înmulți identitatea (188) cu $(\lambda-1)^2$ și apoi vom deriva, după care vom face $\lambda=1$

$$Z_{11}=\left[\frac{C(\lambda)}{\lambda-2}\right]'_{\lambda=1}=-C'(1)-C(1)=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Dacă $f(\lambda)$ este o funcție scalară oarecare, vom avea din (178) că

$$f(A)=f(1)Z_{11}+f'(1)Z_{12}+f(2)Z_{21}.$$

Spre exemplu, dacă luăm $f(\lambda)=e^{\lambda t}$, unde t este un parametru, vom avea $f(1)=e^t$, $f'(1)=te^t$, $f(2)=e^{2t}$ și deci

$$e^{At}=e^tZ_{11}+te^tZ_{12}+e^{2t}Z_{21}.$$

Dacă ținem seama de valorile componentelor matriciale, găsim după înlocuire că

$$e^{At}=\begin{bmatrix}2e^t+te^t-e^{2t} & e^t-e^{2t} & -2e^t-te^t+2e^{2t}\\ te^t & e^t & -te^t\\ e^t+te^t-e^{2t} & e^t-e^{2t} & -e^t-te^t+2e^{2t}\end{bmatrix}.$$

Aceasta este matricea fundamentală a sistemului liniar $\dot{y}=Ay$, în care vectorul y este dat prin $y^T=[y_1, y_2, y_3]$, iar $\dot{y}$ este derivata lui y în raport cu variabila independentă t.

Dacă pentru funcția $f(\lambda)=e^{\lambda t}$ aplicăm formula (178), găsim

$$(189)\quad e^{At}=\sum_{k=1}^{s}[e^{\lambda_k t}Z_{k1}+te^{\lambda_k t}Z_{k2}+\ldots+t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}Z_{km_k}],$$

din care putem deduce comportarea matricii fundamentale a sistemului diferențial liniar $\dot{y}=Ay$, pentru $t\to+\infty$. Aceasta este o problemă importantă în teoria stabilității. Se vede de aici că dacă toate rădăcinile au partea reală negativă, orice soluție a sistemului $\dot{y}=Ay$ tinde exponențial la 0 cînd $t\to+\infty$. Dacă o rădă-

cină caracteristică λ_k are partea reală nulă, dar ea este rădăcină simplă pentru polinomul minimal $\psi(\lambda)$, tragem concluzia că toate soluțiile sistemului $\dot{y}=Ay$ sînt mărginite pentru $t\to+\infty$, bineînțeles în ipoteza că toate celelalte rădăcini au partea reală negativă. Dacă există măcar o rădăcină λ_k cu $\mathrm{Re}\lambda_k>0$, din (189) se vede că sistemul respectiv are și soluții nemărginite pentru $t\to+\infty$.

Să vedem acum o altă metodă de aflare a matricilor Z_{ki}, corespunzătoare unei matrici date A, bazată pe observația că aceste matrici nu depind de funcția $f=f(\lambda)$, care poate deci fi aleasă în modul cel mai convenabil cu putință. Alegînd atîtea funcții cîte matrici Z_{ki} sînt de aflat, vom obține un sistem care ne permite determinarea lor.

Exemplu. Luăm matricea

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&4\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

pentru care $\psi(\lambda)=P(\lambda)=\lambda^2(\lambda-3)$. În formula de bază

$$f(A)=f(0)Z_{11}+f'(0)Z_{12}+f(3)Z_{21}$$

vom lua pe rînd $f(\lambda)=1$, $f(\lambda)=\lambda$, $f(\lambda)=\lambda^2$, găsind

$$Z_{11}+Z_{21}=E,\quad Z_{12}+3Z_{21}=A,\quad 9Z_{21}=A^2,$$

din care putem afla foarte ușor cele 3 componente matriciale ale lui A.

Se poate pune o întrebare foarte interesantă și anume dacă matricea e^{At} definită cu ajutorul seriei (109), coincide cu cea calculată în această secțiune, folosind metoda de interpolare Lagrange-Sylvester. Răspunsul este afirmativ, dar demonstrația o vom face într-un cadru mai general.

Să presupunem că avem un șir $(f_p(\lambda))$, $p=1, 2, 3, \ldots$ de funcții definite împreună cu derivatele lor pe o mulțime ce conține spectrul matricii A, căreia îi corespunde polinomul minimal

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}. \tag{190}$$

Referindu-ne la noțiunea de convergență în mulțimea matricilor pătrate de același tip nxn, vom scrie prescurtat $B_p\to B$, dacă șirul de matrici (B_p) este convergent la B. Cu acestea, putem enunța

Teorema 1.3. *Condiția necesară și suficientă ca* $f_p(A)\to f(A)$ *este ca*

$$f_p(\lambda_k)\to f(\lambda_k),\ f_p'(\lambda_k)\to f'(\lambda_k),\ \ldots,\ f_p^{(m_k-1)}(\lambda_k)\to f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \tag{191}$$

pentru fiecare k *fixat,* $k=\overline{1, s}$.

Demonstrație. Ne vom referi la formula de bază (178), conform căreia putem scrie

$$f_p(A)=\sum_{k=1}^{s}[f_p(\lambda_k)Z_{k1}+f_p'(\lambda_k)Z_{k2}+\ldots+f_p^{(m_k-1)}(\lambda_k)Z_{k,m_k}] \tag{192}$$

pentru orice funcție $f_p(\lambda)$. Amintindu-ne că matricile componente Z_{ki} sînt liniar independente în spațiul vectorial al matricilor pătrate de tipul $n\times n$, ele formează o bază pentru subspațiul liniar generat de ele. Știind că într-un spațiu finit dimensional convergența în normă este echivalentă cu convergența pe coordonate, vedem că din $f_p(A)\to f(A)$ rezultă că șirul format cu coordonatele de același nume ale matricilor $f_p(A)$, converge la coordonata respectivă a lui $f(A)$. Aceasta e totuna cu a spune că (191) sînt îndeplinite. Reciproc este la fel de evident. Demonstrația este încheiată.

Corolar. *Să presupunem că* $f(\lambda)$ *se poate dezvolta în serie de puteri în discul* $|\lambda|<R$.

$$f(\lambda)=\sum_{p=0}^{\infty}a_p\lambda^p,\quad |\lambda|<R \tag{193}$$

și că A *este o matrice pătrată al cărei spectru este inclus în acest disc. Dacă definim* $f(A)$ *cu ajutorul polinomului de interpolare, atunci are loc relația*

$$f(A)=\sum_{p=0}^{\infty}a_pA^p,\ \textit{unde}\ A^0=E. \tag{194}$$

Demonstrație. Notînd

$$f_p(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_p\lambda^p,\ p=1, 2, \ldots \tag{195}$$

și ținînd seama de proprietățile seriilor de puteri, este cu totul evident că relațiile (191) sînt îndeplinite. Aceasta antrenează că $f_p(A)\to f(A)$ și deoarece $f_p(A)$ este suma parțială a seriei care ne interesează, formula (194) este demonstrată.

Tot la fel de simplu se arată că dacă avem

$$f(\lambda)=\sum_{p=0}^{\infty} a_p(\lambda-\lambda_0)^p,\quad |\lambda-\lambda_0|<R, \tag{196}$$

iar A este o matrice cu spectrul cuprins în acest disc, atunci

$$f(A)=\sum_{p=0}^{\infty} a_p(A-\lambda_0 E)^p. \tag{197}$$

Aplicaţie. Dacă luăm $f(\lambda)=e^{\lambda}$, $f(\lambda)=(1-\lambda)^{-1}$, $f(\lambda)=\ln\lambda$, vom putea scrie dezvoltările în serie

$$\left[e^A=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A^p}{p!},\right]\quad (E-A)^{-1}=\sum_{p=0}^{\infty}A^p,\quad \ln A=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p}(A-E)^p, \tag{198}$$

prima valabilă pentru orice matrice pătrată, a doua pentru orice matrice cu spectrul în discul $|\lambda|<1$, iar ultima pentru orice matrice cu spectrul în discul $|\lambda-1|<1$.

În rezumat, avem următoarele căi de urmat cînd vrem să aflăm $f(A)$ într-un caz concret:

i) găsirea lui $f(A)$ plecînd de la dezvoltarea în serie (193) sau (196) a funcţiei analitice $f=f(\lambda)$. Ne putem opri la o sumă parţială care să aproximeze destul de bine matricea $f(A)$. În lipsa unui calculator, metoda este deajuns de greu de a fi transpusă în practică;

ii) folosirea formulei (184), care presupune că sînt cunoscute matricea asociată redusă şi polinomul minimal;

iii) folosirea formulei (178), în care matricile Z_{ki} se află din descompunerea în fracţii simple (179) a fracţiei $C(\lambda)/\psi(\lambda)$;

iv) folosirea formulei (178), în care matricile Z_{ki} se află dintr-un sistem liniar, obţinut prin aplicarea aceleeaşi formule unor polinoame convenabile.

În afară de prima, aceste metode au fost ilustrate în expunerea precedentă şi prin rezolvarea a cîte unui exerciţiu adecvat. Deşi matricea fundamentală e^{At} a sistemului diferenţial $\dot{y}=Ay$ se poate afla cu formula (189), care ne dă suficiente indicaţii şi asupra comportării soluţiilor pentru $t\to+\infty$, se poate totuşi aduce obiecţia că ea conţine componentele matriciale Z_{ki} ale lui A, componente care nu sînt cunoscute de la început. Făcînd apel la forma canonică Jordan a matricii A, acest neajuns poate fi

îndepărtat, reuşindu-se să se scrie matricea fundamentală e^{At} în altă formă, mai condensată decît (189).

Să începem cu cazul cel mai simplu din acest punct de vedere şi anume, acela cînd matricea A are toate rădăcinile caracteristice diferite, adică polinomul $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$, unde λ_k sînt diferiţi unul de altul. Fiecărui λ_k, $k=\overline{1,n}$, îi corespunde cîte un vector propriu h^k, adică au loc relaţiile $Ah^k=\lambda_k h^k$, $k=\overline{1,n}$. Se ştie că un sistem de vectori proprii corespunzători la autovalori diferite sînt liniar independenţi, deci putem spune că cei n vectori h^k, $k=\overline{1,n}$, formează o bază în spaţiul n-dimensional al vectorilor (matricilor) de tipul $n\times 1$. Dacă ne referim la baza standard $e^1, e^2, \dots, e^n$ definită prin

$$(e^k)^T=[0,\dots 0,\overset{k}{1},0,\dots,0],\quad k=\overline{1,n} \tag{199}$$

şi presupunem că vectorul propriu h^k este dat prin

$$(h^k)^T=[h_1^k,\ h_2^k,\dots,h_n^k],\quad k=\overline{1,n}, \tag{200}$$

este cu totul evident că între vectorii celor două baze au loc relaţiile

$$h^k=h_1^k e^1+h_2^k e^2+\dots+h_n^k e^n,\quad k=\overline{1,n}. \tag{201}$$

După cum se ştie din algebră, matricea schimbării de bază, pe care în cazul de faţă o vom nota cu H, este dată de

$$H=\begin{bmatrix} h_1^1\dots h_1^k\dots h_1^n\\ h_2^1\dots h_2^k\dots h_2^n\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\\ h_n^1\dots h_n^k\dots h_n^n\end{bmatrix}, \tag{202}$$

adică coloanele ei sînt formate tocmai de elementele vectorilor proprii h^k, $k=\overline{1,n}$. Matricea H se mai numeşte uneori şi matrice modală.

Tot din algebră se ştie că dacă interpretăm înmulţirea la stînga a vectorilor de tipul $n\times 1$ cu matricea constantă A, ca un operator liniar în acest spaţiu vectorial, matricea sa în baza stan-

dard este chiar matricea A, iar matricea corespunzătoare a operatorului în baza formată din vectorii proprii va fi

$$J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}. \tag{203}$$

Matricea J are toate elementele, în afara celor de pe diagonala principală, egale cu zero. Ea se numeşte matrice diagonală. Este bine ştiut că între A şi J au loc relaţiile

$$J=H^{-1}AH,\quad A=HJH^{-1}. \tag{204}$$

Se mai spune că cele două matrici A şi J sînt asemenea.

Propoziţia 1.10. *Dacă două matrici pătrate A şi B sînt asemenea, adică $B=C^{-1}AC$ în care C este o matrice nesingulară de acelaşi tip cu A şi B, atunci*

$$f(B)=C^{-1}f(A)C, \tag{205}$$

oricare ar fi funcţia scalară $f=f(\lambda)$.

Demonstraţie. Este uşor de constatat că $B^k=C^{-1}A^kC$, oricare ar fi exponentul k natural sau zero. Aceasta atrage că pentru orice polinom $q=q(\lambda)$, avem $q(B)=C^{-1}q(A)C$. Pe de altă parte, matricile A şi B au acelaşi polinom minimal, deci polinomul de interpolare al funcţiei $f=f(\lambda)$ pe spectrul lui A coincide cu polinomul de interpolare pe spectrul lui B. Dacă notăm cu $r(\lambda)$ acest polinom şi ţinem seama că $r(B)=f(B)$, $r(A)=f(A)$ obţinem tocmai (205). Evident că putem scrie şi $f(A)=Cf(B)C^{-1}$.

Ţinînd seama de (204) şi de propoziţia precedentă, avem

$$At=H(Jt)H^{-1},\quad e^{At}=He^{Jt}H^{-1}. \tag{206}$$

Deoarece este cu totul evident că e^{Jt}, matricea fundamentală a sistemului $\dot z=Jz$, este de forma

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}, \tag{207}$$

putem enunţa următoarea

Propoziţia 1.11. *În ipoteza că matricea A are toate rădăcinile caracteristice diferite, putem scrie*

$$e^{At}=H\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}H^{-1}, \tag{208}$$

în care coloanele matricii modale H sînt vectorii proprii ai matricii A, adică vectorii nenuli pentru care $Ah^k=\lambda_k h^k$, $k=\overline{1,n}$.

Să mai facem observaţia că în calitate de h^k, putem lua orice coloană nenulă a matricii $B(\lambda_k)$, în care $B(\lambda)$ este matricea asociată lui A. Această afirmaţie a fost justificată mai demult. Matricea (203) constituie forma canonică Jordan a matricii A, care are toate rădăcinile caracteristice simple. Se mai spune că în acest caz matricea A poate fi diagonalizată.

Observaţie. În cazul de care ne-am ocupat, putem spune că dacă în sistemul diferenţial $\dot y=Ay$ facem schimbarea de variabile $y=Hz$, în care H este matricea modală iar z noul vector necunoscut, sistemul devine $H\dot z=AHz$ sau $\dot z=H^{-1}AHz$, adică $\dot z=Jz$. Integrarea ultimului sistem este banală, deoarece J este o matrice diagonală.

Aplicaţie. Să se afle matricea modală şi matricea fundamentală a sistemului liniar $\dot y=Ay$, în care $y^T=[y_1, y_2, y_3]$ şi

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Găsim $P(\lambda)=det\,(\lambda E-A)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, ceea ce înseamnă $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. Pentru matricea asociată $B(\lambda)$ vom avea

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2-4\lambda+3 & \lambda-1 & \lambda-1\\ \lambda-3 & \lambda^2-4\lambda+3 & -\lambda+3\\ \lambda-3 & -\lambda+1 & \lambda^2-4\lambda+5\end{bmatrix}.$$

Pentru $\lambda=1$, coloana a treia a matricii $B(1)$ ne dă vectorul propriu h^1, definit prin $(h^1)^T=[0, 2, 2]$. Putem împărţi cu 2 şi obţinem

alt vector propriu, al cărui transpus este [0, 1, 1]. Pentru $\lambda=2$, coloana a treia din $B(2)$ ne dă vectorul propriu h^2, cu $(h^2)^T=[1, 1, 1]$. În fine, pentru $\lambda=3$ coloana a doua din $B(3)$ ne dă vectorul propriu h^3, cu $(h^3)^T=[2, 0, -2]$. Îl vom împărți și pe acesta cu 2, noul vector propriu avînd transpusul $[1, 0, -1]$. În concluzie, matricea modală, ale cărei coloane sînt determinate pînă la un factor de proporționalitate, este în cazul de față

$$H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matricea fundamentală se găsește imediat din formula

$$e^{At}=H\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}H^{-1},$$

dar renunțăm să o mai scriem detaliat.

Observație. În cazul cînd apar și rădăcini caracteristice (autovalori) complexe, se lucrează exact la fel ca în real. Dacă A are toate elementele reale, e^{At} are aceeași proprietate.

Trecînd la cazul general, cînd matricea A are și rădăcini caracteristice multiple, lucrurile nu vor mai fi atît de simple. În aceste cazuri, matricea A nu mai poate fi totdeauna diagonalizată, și atunci se va căuta să se aducă la o formă cît mai simplă cu putință, cu ajutorul unei schimbări convenabile de variabile. Această matrice J, asemenea cu A, va avea forma cvasidiagonală și se va numi forma canonică Jordan a matricii A sau forma normală a lui A. Avantajul va consta în aceea că pentru sistemul obținut în urma schimbării de variabile, sistem care va fi de forma $\dot{z}=Jz$, matricea fundamentală e^{Jt} se va calcula foarte simplu, deși nu chiar așa de ușor ca în cazul cînd J ar avea forma diagonală.

Să explicăm pe larg despre ce este vorba. Dacă matricea A are polinomul caracteristic

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{n_s} \quad \text{cu} \quad \sum_{k=1}^{s} n_k=n \tag{209}$$

se poate întîmpla ca autovalorii $\lambda=\lambda_1$, de exemplu, să nu-i corespundă n_1 vectori proprii liniar independenți, ci mai puțini decît n_1. În orice caz, îi corespunde cel puțin un vector propriu, afirmație dealtfel banală. Dacă lui $\lambda=\lambda_1$ îi corespund vectorii proprii liniar independenți $h^1, h^2, \dots, h^{m_1}$ cu $m_1<n_1$, vom fi obligați în acest caz să trecem la rezolvarea sistemelor de forma

$$Ah^1=\lambda_1 h^1,\ Ag^2=\lambda_1 g^2+h^1,\dots,Ag^p=\lambda_1 g^p+g^{p-1}, \tag{210}$$

oprind calculele în momentul cînd sistemul următor, adică sistemul $Ag^{p+1}=\lambda_1 g^{p+1}+g^p$ este incompatibil. Vectorii $g^2, g^3, \dots g^p$ îi vom numi „vectori proprii asociați", corespunzători autovalorii $\lambda=\lambda_1$. Se vede că ei nu sînt vectori proprii în sensul clasic al definiției. Desigur, în (210) nu este exclus ca să fie incompatibil chiar cel de al doilea sistem, în care caz ne oprim la vectorul propriu h^1, determinat anterior. O operație analoagă celeia din (210) ar trebui să facem plecînd și de la ceilalți vectori proprii $h^2, h^3, \dots, h^{m_1}$ corespunzători autovalorii $\lambda=\lambda_1$, determinînd alți „vectori proprii asociați". Se poate demonstra că numărul total al vectorilor proprii și al „vectorilor proprii asociați" (liniar independenți) obținuți prin acest procedeu, corespunzători autovalorii $\lambda=\lambda_1$, este exact n_1=multiplicitatea rădăcinii λ_1 a polinomului (209). Demonstrația acestui fapt ar depăși cadrul acestei cărți, de aceea ne vom mulțumi să enunțăm

Propoziția 1.12. *Numărul total al vectorilor proprii și al „vectorilor proprii asociați" liniar independenți, corespunzători autovalorii* $\lambda=\lambda_k$, $k=\overline{1,s}$ *este egal cu* n_k, *adică cu multiplicitatea rădăcinii* $\lambda=\lambda_k$ *a polinomului caracteristic* (209).

Bineînțeles, nu este exclus cazul ca pentru o rădăcină $\lambda=\lambda_k$ să găsim n_k vectori proprii liniar independenți, în care caz nu mai este nevoie să căutăm și „vectori proprii asociați"; dealtfel ei nici nu ar exista. Tot astfel, dacă numărul total al vectorilor proprii și „proprii asociați" deja determinați, corespunzători rădăcinii $\lambda=\lambda_k$, este egal cu n_k, nu vom mai căuta alții (de fapt nici nu mai există), ci vom opri calculele. Procedînd în acest mod cu toate autovalorile distincte λ_k, $k=\overline{1,s}$, reușim să determinăm o bază formată din vectori proprii și „vectori proprii asociați" ai matricii pătrate A.

Prin definiție, matricea transformării liniare A în noua bază astfel obținută se va numi forma canonică Jordan a matricii A și se va nota cu J.

Pentru a ne da seama de forma matricii J, să revenim la prima autovaloare $\lambda=\lambda_1$, pentru care prin procedeul (210) am găsit p vectori ai noii baze și anume: $h^1, g^2, \ldots, g^p$. Judecînd la modul cel mai general, putem presupune că dacă în (210) plecăm cu vectorul h^2, de asemenea corespunzător lui $\lambda=\lambda_1$, găsim alți vectori ai noii baze și anume: $h^2, f^3, \ldots, f^q, f^{q+1}$ (în număr de q) Parcurgînd toate etapele necesare găsirii noii baze despre care am vorbit și amintindu-ne că dacă într-o bază oarecare formată din vectorii $v^1, v^2, \ldots, v^n$ o transformare liniară A satisface relațiile

$$(211) \qquad Av^i=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}v^j=a_{1i}v^1+a_{2i}v^2+\ldots+a_{ni}v^n, \quad i=\overline{1,n},$$

atunci, prin definiție, matricea ei în această bază, matrice pe care o notăm tot cu A, este dată de

$$(212) \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ținînd seama de (210), rezultă că J va fi formată din celule J_1, $J_2, \ldots, J_m$ situate pe diagonala principală

$$(213) \qquad J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{bmatrix},$$

restul elementelor fiind nule. Prima celulă J_1 se obține din (210) și este de forma

$$(214) \qquad J_1=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

având p linii și p coloane; ea are toate elementele de pe diagonala principală egală cu λ_1 și toate elementele de pe diagonala paralelă

cu aceasta și situată imediat deasupra ei, egale cu 1. Restul elementelor sînt nule. Desigur, se poate ca unei autovalori să-i corespundă mai multe celule în forma canonică Jordan (213). Numărul minim de celule este s=numărul rădăcinilor distincte ale polinomului (209). Pot exista și celule formate dintr-un singur element. Ultima celulă J_m din (213) corespunde în mod sigur ultimei rădăcini λ_s a polinomului caracteristic (209). Numărul care ne arată de cîte ori apare rădăcina λ_k pe diagonala principală a matricii J este egal cu n_k, multiplicitatea ei.

Exemplu. Să presupunem că o matrice A de tip 4×4 are polinomul caracteristic $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)^2$ cu $\lambda_1\neq\lambda_2$. Să vedem ce situații se pot ivi în legătură cu forma sa canonică Jordan:
a) ambelor rădăcini le corespund cîte 2 vectori proprii liniar independenți. În acest caz, J are forma diagonală, pe diagonala principală apărînd de două ori λ_1 și de două ori λ_2;

b) lui λ_1 îi corespund doi vectori proprii liniar independenți, iar lui λ_2 îi corespunde numai unul. Dacă îl notăm pe acesta din urmă cu h^3, vom mai găsi un vector propriu asociat, notat h^4, din sistemul $Ah^4=\lambda_2h^4+h^3$. Matricea J va fi în acest caz prima din relația (215);

c) lui λ_2 îi corespund doi vectori proprii liniar independenți, iar lui λ_1 îi corespunde numai unul. Caz analog cu cel de la b). Matricea J va fi a doua din (215);

d) lui λ_1 și λ_2 le corespunde numai cîte un vector propriu (aceștia sînt determinați pînă la un factor de proporționalitate). Pentru fiecare rădăcină, vom mai afla cîte un „vector propriu asociat". Matricea J va fi ultima din relația următoare

$$(215) \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Exercițiu. Să se scrie diversele forme pe care le poate avea matricea J, dacă $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_2)$ cu $\lambda_1\neq\lambda_2$.

Observație. În teoria matricii Jordan nu se face nici o deosebire între rădăcinile caracteristice reale și cele complexe. Pe de altă parte, deoarece ordinea în care numerotăm rădăcinile unui polinom este arbitrară, rezultă că ordinea în care apar celu-

lele J_i, $i=\overline{1, m}$, în (213) se poate schimba. Celulele ca atare însă nu se schimbă.

Cum s-a mai subliniat, matricea J este avantajoasă deoarece $f(J)$ se poate calcula uşor.

Propoziţia 1.13. *Dacă $q=q(\lambda)$ este un polinom oarecare, iar J_1 este celula* (214) *de tipul $p\times p$, atunci*

$$q(J_1)=\begin{bmatrix} q(\lambda_1) & \frac{q'(\lambda_1)}{1!} & \frac{q''(\lambda_1)}{2!} & \dots & \frac{q^{(p-1)}(\lambda_1)}{(p-1)!} \\ 0 & q(\lambda_1) & \frac{q'(\lambda_1)}{1!} & \dots & \frac{q^{(p-2)}(\lambda_1)}{(p-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q(\lambda_1) \end{bmatrix}. \tag{216}$$

Demonstraţie. Ţinînd seama de (214), putem scrie că $J_1=\lambda_1 E+I$, unde E este matricea unitate de tip $p\times p$ şi I este o matrice de acelaşi tip avînd toate elementele nule, în afara celor de pe diagonala paralelă cu diagonala principală şi situată imediat la dreapta ei. Toate elementele acestei diagonale din I sînt egale cu 1. Se poate verifica uşor că prin ridicarea lui I la diverse puteri, diagonala formată din elementele nenule se deplasează spre dreapta, adică

$$I^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, I^{p-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{217}$$

şi, în mod evident, puterile următoare, începînd cu I^p sînt nule. Pe de altă parte, din formula lui Taylor avem

$$q(\lambda)=q(\lambda_1)+(\lambda-\lambda_1)q'(\lambda_1)+\dots+\frac{(\lambda-\lambda_1)^n}{n!}q^{(n)}(\lambda_1) \tag{218}$$

dacă notăm cu n gradul polinomului $q(\lambda)$; dacă ţinem seama că $J_1-\lambda_1 E=I$, găsim din formula precedentă că

$$q(J_1)=q(\lambda_1)E+q'(\lambda_1)I+\frac{q''(\lambda_1)}{2!}I^2+\dots+\frac{q^{(p-1)}(\lambda_1)}{(p-1)!}I^{p-1}. \tag{219}$$

Avînd în vedere cele spuse despre puterile matricii I, din (219) rezultă imediat formula (216), Q.E.D.

Corolar. *Dacă $f=f(\lambda)$ este o funcţie analitică într-o vecinătate a punctului $\lambda=\lambda_1$, are loc formula corespunzătoare lui* (216), *în care q se înlocuieşte cu f.*

În particular, dacă $f(\lambda)=e^{\lambda t}$, în care t este un parametru, vom obţine că

$$e^{J_1 t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \frac{te^{\lambda_1 t}}{1!} & \frac{t^2e^{\lambda_1 t}}{2!} & \dots & \frac{t^{p-1}e^{\lambda_1 t}}{(p-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & \frac{te^{\lambda_1 t}}{1!} & \dots & \frac{t^{p-2}e^{\lambda_1 t}}{(p-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}. \tag{220}$$

Dacă J este matricea (213), iar $f=f(\lambda)$ este o funcţie analitică în vecinătatea spectrului matricii A, putem scrie şi formula

$$f(J)=\begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_m) \end{bmatrix}, \tag{221}$$

care ne arată că $f(J)$ este tot o matrice cvasidiagonală, avînd m celule. Luînd $f(\lambda)=e^{\lambda t}$ şi ţinînd seama de (220), vom putea găsi expresia matricii fundamentale $exp(Jt)$ a sistemului diferenţial $\dot{z}=Jz$.

Să notăm acum cu $h^1, h^2, \dots, h^n$ noua bază a spaţiului R^n, constînd din vectorii proprii şi „vectorii proprii asociaţi" ai matricii A, numerotaţi în ordinea în care au fost obţinuţi. Cum am mai remarcat, dacă notăm cu H matricea modală, adică matricea ale cărei coloane sînt tocmai vectorii h^k, $k=\overline{1, n}$, atunci putem scrie

$$J=H^{-1}AH,\ A=HJH^{-1}. \tag{222}$$

De aici rezultă, după cum se ştie, că $exp\,(At)=H\,exp\,(Jt)H^{-1}$, relaţie pe care o putem interpreta spunînd că dacă în sistemul diferenţial $\dot{y}=Ay$ facem schimbarea de variabile $y=Hz$, în care

H este matricea modală a acestui sistem, obţinem sistemul $\dot{z}=Jz$ şi matricile fundamentale ale celor două sisteme satisfac condiţia

(223) $$e^{At}=He^{Jt}H^{-1}.$$

Exemplul 1. Pentru sistemul $\dot{y}=Ay$, în care $y^T=[y_1, y_2, y_3]$, iar

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

să se afle matricea modală, matricea fundamentală şi forma canonică J a lui A.

Rezolvare. Găsim $P(\lambda)=(\lambda-2)^3$, iar din sistemul algebric $Ah=2h$ în care $h^T=[h_1, h_2, h_3]$, obţinem un singur vector propriu, dacă facem abstracţie de factorul de proporţionalitate. El este dat prin egalitatea $h^T=[1, 2, 1]$. Din sistemul $Ag=2g+h$ găsim vectorul propriu asociat g, dat prin $g^T=[1, 1, 0]$. Tot astfel, din $Af=2f+g$ mai găsim un astfel de vector, dat prin $f^T=[1, 1, 1]$. Dacă îi notăm acum cu h^1, h^2, h^3 înseamnă că matricea modală este cunoscută. Putem deci să scriem

$$H=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

şi de asemenea

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t}\\ 0 & e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{bmatrix},\qquad e^{At}=He^{Jt}H^{-1}.$$

Exemplul 2. Pentru matricea

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -3 & 3 & -5 & 4\\ 8 & -4 & 3 & -4\\ 15 & -10 & 11 & -11\end{bmatrix}$$

să se aplice algoritmul Fadeev de aflare a lui $P(\lambda)$ şi $B(\lambda)$. Să se arate că J şi H au expresiile

$$J=\left[\begin{array}{cccc:c}-1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & -1 & \end{array}\right],\quad H=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -5 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 5\\ -1 & 11 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

Indicaţie. Se va găsi $P(\lambda)=(\lambda+1)^4$, rădăcinii multiple $\lambda=-1$ corespunzîndu-i doi vectori proprii liniar independenţi, respectiv prima şi ultima coloană din H. După cum se ştie, făcînd abstracţie de un factor de proporţionalitate, aceşti vectori sînt coloane ale matricii $B(-1)$. Plecînd de la primul din ei, se mai obţin alţi doi „vectori proprii asociaţi", respectiv a doua şi a treia coloană din H. Rezultă că J are forma enunţată, avînd aici un caz în care unei rădăcini multiple îi corespund două celule în forma canonică (separate cu ajutorul liniilor punctate). Este instructiv să se scrie matricea $exp\,(Jt)$ în acest caz concret.

Observaţie. Uneori este necesar să cunoaştem forma canonică Jordan a unei matrici A, matricea modală interesîndu-ne în mai mică măsură. În acest scop, dacă notăm cu $d_k(\lambda)$ cel mai mare divizor comun (avînd primul coeficient egal cu 1) al minorilor de ordinul k din matricea caracteristică $\lambda E-A$, obţinem şirul de polinoame

(224) $$d_n(\lambda),\ d_{n-1}(\lambda),\ \ldots,\ d_1(\lambda),$$

dintre care primul este tocmai polinomul caracteristic $P(\lambda)$, iar al doilea a fost notat în acest capitol cu $d(\lambda)$. Reamintim că raportul primelor două polinoame din (224) este tocmai polinomul minimal $\psi(\lambda)$ al matricii A. În şirul (224), fiecare polinom îl divide pe precedentul. Polinoamele

(225) $$i_1(\lambda)=\frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)},\quad i_2(\lambda)=\frac{d_{n-1}(\lambda)}{d_{n-2}(\lambda)},\ \ldots,\ i_n(\lambda)=\frac{d_1(\lambda)}{d_0(\lambda)},\ (d_0(\lambda)=1)$$

se numesc polinoamele invariante ale matricii A, iar divizorii lor de forma $(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ se numesc divizori elementari ai matricii A. Numerele λ_k pot fi reale sau complexe şi de fapt coincid cu rădăcinile caracteristice ale lui A. Se înţelege că aici am notat cu m_k puterea maximă la care apare factorul $(\lambda-\lambda_k)$ în descompunerea

respectivului polinom invariat. Un anumit factor $(\lambda-\lambda_k)$ poate apărea în descompunerea mai multor polinoame invariate (225) cu același exponent sau cu exponenți diferiți. Vom scrie toți divizorii elementari ai matricii A, în ordinea în care apar în descompunerea tuturor polinoamelor (225), indiferent de faptul dacă ei sînt sau nu sînt diferiți între ei. Unui divizor elementar de forma $(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ îi corespunde în matricea Jordan o celulă de dimensiunea m_k (numărul comun al liniilor și coloanelor ei), dată prin

$$J_k=\begin{bmatrix}\lambda_k & 1 & 0\ldots 0\\ 0 & \lambda_k & 1\ldots 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ 0 & 0 & 0\ldots\lambda_k\end{bmatrix}. \tag{226}$$

Dacă $m_k=1$, celula precedentă se reduce la un singur element și anume la λ_k. Desigur, ordinea în care apar celulele J_k în forma canonică J poate fi apoi schimbată.

Exemplu. Să presupunem că pentru o matrice A de tip 6×6, avem

$d_6(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^5(\lambda-\lambda_2)$, $d_5(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^4(\lambda-\lambda_2)$, $d_4(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)$, $d_3(\lambda)=\lambda-\lambda_2$,

iar $d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$. În acest caz, polinoamele invariante sînt $i_1(\lambda)=\lambda-\lambda_1$, $i_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2$, $i_3(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2$, $i_4(\lambda)=\lambda-\lambda_2$, $i_5(\lambda)=i_6(\lambda)=1$.

Divizorii elementari vor fi în acest caz $\lambda-\lambda_1$, $(\lambda-\lambda_1)^2$, $(\lambda-\lambda_1)^2$, $\lambda-\lambda_2$ și forma canonică Jordan se poate scrie imediat. În practică, este greu de aplicat această regulă, deoarece aflarea polinoamelor $d_k(\lambda)$ presupune calcule foarte lungi.

1.4. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ ORDINARĂ DE ORDINUL n

Vom numi astfel o relație de forma $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, unde $F=F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ este o funcție cu derivate parțiale de ordinul întîi continui într-un domeniu din spațiul cu $n+1$ dimensiuni, funcție care nu este peste tot diferită de zero.

Prin soluție a ecuației date înțelegem o funcție $y=y(x)$ derivabilă de n ori pe intervalul ei de definiție și avînd proprietatea că pe acest interval

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\equiv 0. \tag{227}$$

Forma normală a ecuației de care ne ocupăm este

$$y^{(n)}(x)=f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)). \tag{228}$$

Să arătăm că integrarea acestei ecuații este echivalentă cu integrarea unui sistem diferențial de ordinul întîi. În adevăr, dacă notăm

$$y=y_1,\ y'=y_2, \ldots, y^{(n-1)}=y_n \tag{229}$$

și dacă $y=y(x)$ este o soluție a ecuației (228), definită pe un interval care al axei reale, este clar că funcțiile $y_i(x)$, $i=\overline{1, n}$, vor verifica sistemul

$$y_1'(x)=y_2,\ y_2'(x)=y_3, \ldots, y_{n-1}'(x)=y_n,\ y_n'(x)=f(x, y_1, \ldots, y_n) \tag{230}$$

pe intervalul respectiv. Reciproc, dacă n-upla de funcții $y_i=y_i(x)$, $i=\overline{1, n}$, verifică sistemul (230) pe un anumit interval, notînd cu $y(x)$ funcția $y_1(x)$, se vede că ea satisface ecuația (228).

Din teorema de existență și unicitate a soluției pentru sistemele diferențiale, obținem

Teorema 1.9. *Presupunem că $f=f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ este o funcție continuă în domeniul D din spațiul $n+1$ dimensional și satisface acolo condiția Lipschitz locală* (63).

Atunci, oricare ar fi punctul $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})\in D$, există o singură soluție $y=y(x)$ a ecuației (228), *definită într-o vecinătate suficient de mică a lui x_0 și satisfăcînd condițiile inițiale*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{231}$$

Definiția 1.8. Vom numi ecuație diferențială liniară de ordinul n o ecuație de forma

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=b(x), \tag{232}$$

în care coeficienții $a_i=a_i(x)$, $i=\overline{0, n}$, și termenul liber $b=b(x)$ sînt funcții continui pe un interval I al axei reale. Se presupune că

$a_0(x) \neq 0$ pentru $x \in I$, astfel că ecuația precedentă poate fi scrisă în forma

$$(233) \qquad y^{(n)} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y^{(n-1)} - \ldots - \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y + \frac{b(x)}{a_0(x)}, \quad x \in I.$$

Propoziția 1.14. *Oricare ar fi $x_0 \in I$ și oricare ar fi numerele reale $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, există o singură soluție $y = y(x)$ a ecuației* (232), *care satisface condițiile* (231) *și această soluție este definită pe tot intervalul I.*

Trebuie justificată doar afirmația că soluția respectivă există pe întreg intervalul I. Acest lucru este o consecință a faptului că sistemul (230) care este echivalent cu ecuația (232) este un sistem liniar, dacă se are în vedere (233). Or, se știe că pentru sistemele liniare soluția există pe întreg intervalul de continuitate al coeficienților.

Propoziția 1.15. *Dacă $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ sînt soluții particulare ale ecuației liniare omogene*

$$(234) \qquad a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

atunci orice combinație liniară a lor

$$(235) \qquad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_m y_m(x), \quad c_i = \text{const.}, \quad i = \overline{1, m}$$

este de asemenea soluție.

Definiția 1.9. Se numește wronskianal soluțiilor particulare $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ale ecuației (234), funcția $W = W(x)$ dată de

$$(236) \qquad W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in I.$$

Propoziția 1.16. *Oricare ar fi cele n soluții particulare ale ecuației* (234), *wronskianul lor este sau identic nul, sau diferit de zero în orice punct din I.*

Demonstrație. Se vede că $W = W(x)$ este derivabilă pe I și ținînd seama de regula derivării unui determinant ale cărui elemente sînt funcții, vom găsi că

$$(237) \qquad W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x), \qquad x \in I,$$

de unde se trage concluzia că

$$(238) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[W(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} (a_1(t)/a_0(t))\,\mathrm{d}t \right) \right] \equiv 0,$$

x_0 fiind un punct fixat din I. Din anularea identică a derivatei deducem că funcția din paranteza dreaptă este constantă, găsind apoi că

$$(239) \qquad W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} (a_1(t)/a_0(t))\,\mathrm{d}t \right), \quad x \in I.$$

Aceasta justifică complet afirmația din enunț și demonstrația se încheie.

Vom spune că n soluții particulare $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ale ecuației (234) sînt liniar independente, dacă relația

$$(240) \qquad c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

poate avea loc numai pentru $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. În caz contrar, soluțiile se numesc liniar dependente.

Propoziția 1.17. *Condiția necesară și suficientă ca n soluții particulare ale ecuației* (234) *să fie liniar dependente este ca wronskianul lor să fie identic nul. Deci, condiția necesară și suficientă de independență este ca wronskianul să fie diferit de zero.*

Demonstrație. Să admitem că cele n soluții particulare sînt liniar dependente. Vom avea deci o relație de forma (240), în care măcar un coeficient c_i este nenul. Scriind această relație și cele obținute din ea prin derivare, găsim

$$(241) \qquad \begin{aligned} & c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0 \\ & c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \ldots + c_n y_n'(x) = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0, \end{aligned}$$

care interpretat în fiecare punct $x \in I$ ca un sistem algebric liniar omogen în necunoscutele c_i, $i = \overline{1, n}$, ne arată că determinantul coeficienților este nul. Aceasta înseamnă tocmai că $W(x) \equiv 0$ pe intervalul I.

Reciproc, să presupunem că wronskianul celor n soluții este identic nul și fie x_0 un punct oarecare din I. Considerînd sistemul (241) pentru $x=x_0$, el va avea o soluție nebanală c_i^*, $i=\overline{1, n}$, deoarece determinantul coeficienților este $W(x_0)=0$. Funcția

$$y(x)=c_1^*y_1(x)+c_2^*y_2(x)+\ldots+c_n^*y_n(x) \tag{242}$$

va fi atunci o soluție particulară (234) care satisface condițiile

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=0. \tag{243}$$

Deoarece funcția identic nulă satisface (234) și (243), ținînd seama de unicitatea soluției rezultă $y(x)\equiv 0$ pe I, adică cele n soluții particulare considerate sînt liniar dependente, Q.E.D.

Propoziția 1.17. *Dacă $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ sînt n soluții particular independente ale ecuației* (234), *atunci soluția ei generală va fi*

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x), \tag{244}$$

în care c_i, $i=\overline{1, n}$ sînt constante arbitrare.

Demonstrație. Mai întîi, este evident că orice funcție de forma (244) verifică ecuația (234). Reciproc, fie $y=y(x)$ o soluție oarecare pentru (234) și x_0 un punct din I. Sistemul algebric

$$\begin{aligned}
&c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+\ldots+c_ny_n(x_0)=y(x_0)\\
&c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)+\ldots+c_ny_n'(x_0)=y'(x_0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}(x_0),
\end{aligned} \tag{245}$$

are soluție unică c_i^*, $i=\overline{1, n}$ deoarece determinantul coeficienților necunoscutelor este $W(x_0)\neq 0$. Notînd

$$y_*(x)=c_1^*y_1(x)+c_2^*y_2(x)+\ldots+c_n^*y_n(x), \tag{246}$$

obținem o soluție a ecuației (234), pentru care

$$y_*(x_0)=y(x_0),\ y_*'(x_0)=y'(x_0),\ \ldots,\ y_*^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}(x_0). \tag{247}$$

Din teorema de unicitate rezultă $y_*(x)\equiv y(x)$ pentru $x\in I$, ceea ce înseamnă că soluția $y=y(x)$ se exprimă în adevăr ca o combinație liniară (246) de cele n soluții particulare liniar independente

$y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$. Deoarece soluția $y=y(x)$ a fost luată arbitrar, demonstrația este completă.

Propoziția 1.18. *Soluția generală a ecuației* (232) *este suma dintre o soluție particulară a sa și soluția generală a ecuației omogene* (234) *corespunzătoare ei.*

Demonstrație. Fie $y_0=y_0(x)$ o soluție particulară a ecuației (232), soluție pe care o presupunem fixată în cele ce urmează. Dacă $z(x)$ este o soluție oarecare a ecuației (234), se arată imediat că funcția $y(x)=y_0(x)+z(x)$ verifică ecuația liniară neomogenă (232). Reciproc, dacă $y=y(x)$ este o soluție oarecare lui (232), notînd $z(x)=y(x)-y_0(x)$, găsim că $z(x)$ verifică ecuația omogenă (234). Ținînd seama de Propoziția 1.17, putem spune acum că soluția generală a ecuației (232) este dată de formula

$$y(x)=y_0(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x), \tag{248}$$

în care c_i, $i=\overline{1, n}$ sînt constante arbitrare, iar $y_i(x)$, $i=\overline{1, n}$ au semnificația știută. Demonstrația este încheiată.

Din Propoziția precedentă se vede importanța cunoașterii unei soluții particulare pentru ecuația neomogenă (232). Aceasta se poate afla prin metoda variației constantelor, pe care am întîlnit-o și în cazul sistemelor.

Vom căuta soluția particulară pentru (232) în forma

$$y_0(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\ldots+u_n(x)y_n(x), \tag{249}$$

în care $u_i(x)$, $i=\overline{1, n}$ sînt funcții ce trebuie determinate, iar $y_i(x)$, $i=\overline{1, n}$ sînt soluții liniar independente ale ecuației (234). Derivînd funcția $y_0(x)$, găsim

$$y_0'(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i'(x)y_i(x)+\sum_{i=1}^{n}u_i(x)y_i'(x) \tag{250}$$

și impunem condiția ca primul termen al acestei sume să fie nul. Pentru $y_0''(x)$ vom avea atunci

$$y_0''(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i'(x)y_i'(x)+\sum_{i=1}^{n}u_i(x)y_i''(x) \tag{251}$$

și anulăm din nou prima sumă din partea dreaptă a egalității. Procedînd astfel și cu derivatele de ordin mai mare, obținem

$$y_0^{(n-1)}(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i'(x)y_i^{(n-2)}(x)+\sum_{i=1}^{n}u_i(x)y_i^{(n-1)}(x) \tag{252}$$

și anulăm din nou prima sumă din dreapta. Vom găsi atunci

$$(253)\qquad y_0^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{n} u_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n} u_i(x)y_i^{(n)}(x)$$

și prin înlocuirea tuturor acestor derivate în ecuația neomogenă (232) mai obținem o condiție asupra funcțiilor $u_i'(x), i=\overline{1, n}$. Punînd la un loc toate condițiile impuse derivatelor $u_i'(x)$, obținem sistemul

$$(254)\qquad \begin{aligned} &u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)+\ldots+u_n'(x)y_n(x)=0\\ &u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)+\ldots+u_n'(x)y_n'(x)=0\\ &\text{-------------------------------}\\ &u_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+u_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+\ldots+u_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0\\ &u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+u_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=\frac{b(x)}{a_0(x)}, \end{aligned}$$

din care putem afla în mod unic aceste derivate, avînd în vedere că determinantul sistemului este un wronskian $\neq 0$. Funcțiile $u_i(x), i=\overline{1, n}$ sînt determinate pînă la o constantă aditivă și pentru aflarea lor sînt necesare n cuadraturi.

Din punct de vedere teoretic, putem considera rezolvată problema integrării ecuației liniare (232) sau (234). Dar trebuie să facem mențiunea că, găsirea a n soluții liniar independente pentru (234) este foarte complicată sau chiar imposibilă, dacă coeficienții sînt funcții continui oarecare. În cazul coeficienților constanți, lucrurile se simplifică foarte mult. Ne vom ocupa de ecuația omogenă cu coeficienții constanți

$$(255)\qquad a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0,\ a_0\neq 0,$$

în care $a_i,\ i=\overline{0, n}$ sînt constante reale.
Dacă introducem un operator diferențial liniar L, prin relația

$$(256)\qquad L=a_0\frac{d^n}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{d}{dx}+a_n,$$

atunci ecuația (255) poate fi scrisă prescurtat în forma $Ly=0$. Este evident că $L(e^{rx})=P(r)e^{rx}$, unde prin $P(r)$ am notat polinomul

$$(257)\qquad P(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+\ldots+a_{n-1}r+a_n,$$

numit polinomul caracteristic al ecuației (255).

Dacă vom observa că x^ke^{rx} poate fi interpretat ca o derivată parțială și anume

$$(258)\qquad x^ke^{rx}=\frac{\partial^k}{\partial r^k}(e^{rx}),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

și că L este permutabil cu simbolul $\partial/\partial r$, vom găsi că

$$(259)\qquad \begin{aligned} L(x^ke^{rx})&=L\left[\frac{\partial^k}{\partial r^k}(e^{rx})\right]=\frac{\partial^k}{\partial r^k}[L(e^{rx})]=\frac{\partial^k}{\partial r^k}[P(r)e^{rx}]=\\ &=e^{rx}[x^kP(r)+C_k^1x^{k-1}P'(r)+\ldots+P^{(k)}(r)]. \end{aligned}$$

Propoziția 1.19. *Dacă* $r=r_1$, *este o rădăcină de multiplicitate* n_1 *a polinomului caracteristic* (257), *atunci ecuația* (255) *admite următoarele soluții particulare*

$$(260)\qquad e^{r_1x},\ xe^{r_1x},\ x^2e^{r_1x},\ldots,\ x^{n_1-1}e^{r_1x}.$$

Demonstrație. Faptul că r_1 este rădăcină de multiplicitate n_1 a polinomului $P=P(r)$ este echivalent cu anularea polinomului și a primelor sale n_1-1 derivate în punctul $r=r_1$, derivata de ordinul n_1 fiind diferită de zero în acest punct. Dînd în (259) lui k valorile $0, 1,\ldots, n_1-1$ ne convingem ușor că funcțiile (260) verifică ecuația $Ly=0$, Q.E.D.

Putem deci spune că unei rădăcini a lui $P(r)$ de multiplicitate n_1, îi corespund n_1 soluții particulare liniar independente ale ecuației (255). Judecînd la fel și în cazul celorlalte rădăcini ale polinomului caracteristic, vom găsi în total n soluții particulare liniar independente ale ecuației (255), deci vom putea scrie soluția ei generală. Dacă o rădăcină este complexă, de exemplu $r_1=\alpha+j\beta$ cu $\beta\neq 0$, ecuația cu coeficienți reali $P(r)=0$ va avea și rădăcina $\bar{r}_1=\alpha-j\beta$. Deoarece se vede imediat că partea reală și partea imaginară a unei soluții complexe sînt soluții reale pentru aceeași ecuație, ajungem la concluzia că celor două rădăcini complexe r_1 și $\bar{r}_1$ le corespund $2n_1$ soluții particulare reale. Concluzia finală este că indiferent dacă rădăcinile ecuației $P(r)=0$ sînt reale sau complexe, distincte sau confundate, găsim totdeauna, ținînd seama de (260), n soluții reale liniar independente pentru ecuația (255).

Exemplu. Să se scrie soluția generală a ecuației

$$y^{V}+8y'''+16y'=0.$$

Rezolvare. Ecuația $P(r)=0$ este $r(r^4+8r^2+16)=0$ sau $r(r^2+4)^2=0$ și are rădăcinile $r_1=0$, $r_2=r_3=2j$, $r_4=r_5=-2j$. Vom avea rezultatul

$$y=c_1+(c_2+c_3x)\cos 2x+(c_4+c_5x)\sin 2x,$$

în care c_i sînt constante arbitrare.

Avînd în vedere cele prezentate aici, putem enunța următoarea

Teorema 1.10. *Dacă polinomul caracteristic al ecuației* (255) *admite descompunerea*

$$P(r)=a_0(r-r_1)^{n_1}(r-r_2)^{n_2}\dots(r-r_s)^{n_s},\quad \sum_{i=1}^{s} n_s=n, \tag{261}$$

atunci soluția generală a acestei ecuații este dată de

$$y(x)=Q_1(x)e^{r_1x}+Q_2(x)e^{r_2x}+\dots+Q_s(x)e^{r_sx}, \tag{262}$$

în care $Q_i(x)$, $i=\overline{1,s}$ *sînt polinoame de gradul* n_i-1, *cu coeficienții constante arbitrare.*

Uneori se evită aplicarea teoriei generale expuse aici, cînd este vorba să se abordeze un exemplu concret, preferîndu-se un procedeu mai algoritmic, bazat pe obținerea unei anumite formule și aplicarea ei de la caz la caz. Să observăm mai întîi că ecuația liniară

$$\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_ny=f(t), \tag{263}$$

cu condițiile inițiale

$$y(0)=y_0,\ \frac{dy}{dt}(0)=y_0',\dots,\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)=y_0^{(n-1)} \tag{264}$$

este echivalentă cu sistemul diferențial liniar

$$\dot{y}_1=y_2,\ \dot{y}_2=y_3,\dots,\dot{y}_{n-1}=y_n,\ \dot{y}_n=-a_ny_1-\dots-a_1y_n+f(t), \tag{265}$$

cu condițiile inițiale

$$y_1(0)=y_0,\ y_2(0)=y_0',\dots,\ y_n(0)=y_0^{(n-1)}, \tag{266}$$

dacă așa cum am mai făcut și cu altă ocazie, facem notațiile

$$y=y_1,\ \frac{dy}{dt}=y_2,\dots,\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}=y_n. \tag{267}$$

Putem scrie sistemul (265) cu condițiile (266) în forma vectorială

$$\dot{Y}(t)=AY+F(t),\ (Y(0))^T=[y_0,\ y_0',\dots,\ y_0^{(n-1)}], \tag{268}$$

dacă, așa cum se subînțelege, Y și F sînt dați prin

$$Y^T=[y_1,\ y_2,\dots,\ y_n],\ F^T=[0,\ 0,\dots,\ 0,\ f], \tag{269}$$

iar matricea A se scrie pe larg astfel

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}. \tag{270}$$

În ipoteza că am aflat matricea fundamentală $exp(At)$, din (268) rezultă

$$Y(t)=e^{At}Y(0)+\int_0^t e^{A(t-s)}F(s)ds. \tag{271}$$

Dar pe noi ne interesează numai prima componentă a vectorului Y și așa stînd lucrurile, se pune atunci întrebarea dacă merită pentru aceasta să calculăm matricea $exp(At)$. Putem însă observa că nu e necesar să aflăm toate elementele matricei fundamentale $exp(At)$, ci numai pe cele din prima linie. Apoi, din cauza formei speciale a vectorului F, primul element al vectorului de sub integrală, $exp(A(t-s))F(s)$, va fi egal cu produsul dintre elementul din colțul dreapta-sus al matricii $exp(A(t-s))$ și funcția $f(s)$. Este de asemenea cunoscut că pentru polinomul caracteristic al matricii A din (270) are loc relația

$$det(\lambda E-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n, \tag{272}$$

adică el coincide cu polinomul caracteristic al ecuației omogene atașate lui (263), deci al ecuației

$$\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_ny=0. \tag{273}$$

Să facem acum o ipoteză restrictivă și anume să presupunem că polinomul caracteristic $P(\lambda)$ dat de (271) are toate rădăcinile simple. În acest caz, pentru matricea fundamentală $exp(At)$ avem

$$e^{At}=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(\lambda_i)}{P'(\lambda_i)}e^{\lambda_i t}, \tag{274}$$

unde $B(\lambda)$ este matricea asociată a lui A. Ținînd seama de aceasta, putem retranscrie (271) în forma

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda_i t}}{P'(\lambda_i)}B(\lambda_i)Y(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda_i t}}{P'(\lambda_i)}\int_0^t B(\lambda_i)e^{-\lambda_i s}F(s)ds. \tag{275}$$

Dacă notăm cu $b_{ij}(\lambda)$ elementele matricii $B(\lambda)$, cu $b_1(\lambda)$ matricea de tipul $1\times n$ formată cu elementele primei linii din $B(\lambda)$, adică

$$b_1(\lambda)=[b_{11}(\lambda),\ b_{12}(\lambda),\ \ldots,\ b_{1n}(\lambda)] \tag{276}$$

și folosim notația mai potrivită y^0 în loc de $Y(0)$, pentru vectorul datelor inițiale (264), găsim pentru soluția $y=y(t)$ a problemei (263)+(264) expresia următoare

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda_i t}}{P'(\lambda_i)}b_1(\lambda_i)y^0+\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda_i t}}{P'(\lambda_i)}\int_0^t b_{1n}(\lambda_i)e^{-\lambda_i s}f(s)ds. \tag{277}$$

Trecem la determinarea elementelor din prima linie a matricii $B(\lambda)$, plecînd de la relația cunoscută $B(\lambda)(\lambda E-A)=P(\lambda)E$. Vom avea deci

$$[b_{11},\ b_{12},\ \ldots,\ b_{1n}](\lambda E-A)=[P(\lambda),\ 0,\ \ldots,\ 0], \tag{278}$$

iar dacă scriem aceasta pe larg, obținem relațiile

$$b_{11}\lambda+b_{1n}a_n=P(\lambda),\quad -b_{1j}+b_{1,j+1}\lambda+b_{1n}a_{n-j}=0,\ j=\overline{1,\ n-2}$$
$$-b_{1,n-1}+b_{1n}(\lambda+a_1)=0. \tag{279}$$

Din prima condiție rezultă $b_{1n}=1$, iar din ultima $b_{1,n-1}=\lambda+a_1$. Folosind relația de recurență din (279), se găsește fără nici o dificultate formula

$$b_{1j}=\lambda^{n-j}+a_1\lambda^{n-j-1}+\ldots+a_{n-j-1}\lambda+a_{n-j},\ j=\overline{1,\ n-1};\ b_{1n}=1. \tag{280}$$

Aceasta ne arată, așa cum era de așteptat, că elementele primei linii din matricea $B(\lambda)$ sînt polinoame de grad cel mult egal cu

$n-1$ în variabila λ și că ele se obțin după o regulă destul de simplă. Putem scrie (277) și în forma următoare

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda_i t}}{P'(\lambda_i)}(b_1(\lambda_i)y^0+\int_0^t e^{-\lambda_i s}f(s)ds) \tag{281}$$

sau în o altă formă echivalentă și anume

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P'(\lambda_i)}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{1j}(\lambda_i)y_0^{(j-1)}e^{\lambda_i t}+\int_0^t e^{\lambda_i(t-s)}f(s)ds\right). \tag{282}$$

Ținînd seama de cele spuse aici, putem enunța următoarea

Propoziția 1.20. *Dacă polinomul caracteristic $P(\lambda)$ are rădăcinile simple, atunci soluția problemei (263)+(264) este dată prin formula (281) sau prin echivalenta ei (282).*

Exemplu. Să se afle soluția problemei

$$\ddot{y}+7\dot{y}+12y=\sin t,\ y(0)=1,\ \dot{y}(0)=2.$$

Rezolvare. $P(\lambda)=\lambda^2+7\lambda+12=(\lambda+3)(\lambda+4)$ și $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-4$. Mai găsim $P'(-3)=1$ și $P'(-4)=-1$. Din formula (280) rezultă că $b_{11}=\lambda+7$, $b_{12}=1$. Aplicînd (282), vom putea scrie

$$y(t)=6e^{-3t}+\int_0^t e^{-3(t-s)}\sin s\ ds-(5e^{-4t}+\int_0^t e^{-5(t-s)}\sin s\ ds)$$

sau în forma definitivă

$$y(t)=\frac{1}{170}(1037e^{-3t}-860e^{-4t}+11\sin t-7\cos t).$$

1.5. ECUAȚIA ȘI FUNCȚIILE LUI BESSEL

Ca o aplicație a teoriei ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți variabili, ne vom ocupa de următoarea ecuație, zisă a lui Bessel

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0,\qquad x>0, \tag{283}$$

unde $\nu \geqslant 0$ este o constantă. Această ecuație apare în rezolvarea multor probleme concrete, ca, de exemplu, calcularea temperaturii într-o placă sau un cilindru circular, găsirea potențialului cîmpului electrostatic în cazul sistemelor de electrozi cu simetrie cilindrică etc.

Vom vedea că există două situații distincte în ce privește ecuația (283) și anume: cînd $\nu \neq$ întreg și cînd $\nu =$ întreg. Contrar așteptărilor, rezolvarea se face mai ușor în primul caz decît în al doilea. Ca metodă generală de lucru, se folosește căutarea unor soluții particulare ale acestei ecuații, sub forma unor serii de puteri. Mai exact, vom căuta soluții de forma

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0, \tag{284}$$

unde r și c_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ trebuie determinați. Prin derivare în raport cu x, vom găsi

$$y'(x) = x^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (r+k) x^k \tag{285}$$

și respectiv

$$y''(x) = x^{r-2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (r+k)(r+k-1) x^k. \tag{286}$$

După ce înlocuim aceste dezvoltări în ecuația (283) și simplificăm cu factorul $x^r \neq 0$, găsim o condiție care poate fi scrisă în forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(r+k)^2 - \nu^2] c_k x^k = - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2}. \tag{287}$$

Prin identificarea coeficienților celor două serii de puteri, găsim mai întîi că în mod necesar

$$(r^2 - \nu^2) c_0 = 0 \quad \text{și} \quad [(r+1)^2 - \nu^2] c_1 = 0, \tag{288}$$

condiții ce spun că termenul liber și cel de gradul întîi în variabila x nu apar în (287). Apoi trebuie să avem

$$[(r+k)^2 - \nu^2] c_k = - c_{k-2}, \quad k \geqslant 2. \tag{289}$$

Deoarece $c_0 \neq 0$, rezultă $r = \pm \nu$. Luînd $r = \nu$, găsim $c_1 = 0$ și din relația precedentă avem că toți coeficienții cu indice impar sînt nuli, adică

$$c_{2k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{290}$$

Pentru coeficienții cu indice par, formula de recurență (289) ne arată că avem

$$4k(\nu + k) c_{2k} = - c_{2k-2}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{291}$$

Scriind această egalitate pentru valorile $1, 2, \ldots, k$ ale indicelui, găsim

$$4^k k! (\nu+1)(\nu+2) \ldots (\nu+k) c_{2k} = (-1)^k c_0. \tag{292}$$

Dacă ne amintim de funcția lui Euler $\Gamma = \Gamma(z)$, definită prin condiția

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^z}{z(1+z)(2+z) \ldots (n+z)}, \tag{293}$$

pentru orice z diferit de 0 și de întregii negativi, unde prin puterea complexă n^z înțelegem numărul $exp\,(z \ln n)$ și ținem seama că ea satisface relația

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \neq 0, \ -1, \ -2, \ldots \tag{294}$$

ajungem la concluzia că

$$(\nu+1)(\nu+2) \ldots (\nu+k) = \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}. \tag{295}$$

Cu alte cuvinte, din (292) vom deduce că

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{296}$$

și atunci soluția particulară pe care am determinat-o este de forma

$$y(x) = c_0 \Gamma(\nu+1) 2^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}. \tag{297}$$

Dacă se alege în mod convenabil valoarea lui c_0, obținem o soluție numită funcția lui Bessel de speța întîi și de ordin ν, notată $J_\nu(x)$ și dată de seria

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad x > 0. \tag{298}$$

Putem să scriem și formula

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad x > 0, \tag{299}$$

iar seria de puteri ce apare aici converge pentru orice x real; rezultă că $J_\nu(x)$ este definită şi satisface ecuaţia lui Bessel pentru $x>0$.

Dacă $\nu\neq$ întreg, putem găsi foarte uşor o altă soluţie particulară pentru ecuaţia (283). În adevăr, luînd $r=-\nu$ şi toţi coeficienţii c_k cu indice impar egali cu zero, condiţia de satisfacere a ecuaţiei lui Bessel se reduce de data aceasta la

$$4k(-\nu+k)c_{2k}=-c_{2k-2},\quad k=1,2,3,\ldots \tag{300}$$

de unde, la fel ca în cazul precedent, găsim

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k c_0\Gamma(-\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(-\nu+k+1)},\quad k=0,1,2,\ldots \tag{301}$$

Ipoteza $\nu\neq$ întreg ne asigură că expresia $-\nu+k+1$ pentru k întreg $\geqslant 0$ nu poate coincide cu polii funcţiei $\Gamma(z)$ şi deci formula precedentă are sens. Alegînd convenabil constanta c_0, obţinem că funcţia

$$J_{-\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},\quad x>0, \tag{302}$$

numită funcţia lui Bessel de speţa întîi şi ordin $-\nu$, este definită şi satisface ecuaţia (283) pentru $x>0$.

Cele două soluţii $y_1=J_\nu(x)$ şi $y_2=J_{-\nu}(x)$ cu $\nu\neq$ întreg sînt liniar independente, căci wronskianul lor

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}\neq 0,\quad x>0. \tag{303}$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei lui Bessel cu $\nu\neq$ întreg este

$$y(x)=c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x), \tag{304}$$

cu c_1 şi c_2 constante arbitrare.

În cazul $\nu=n=$ întreg $\geqslant 0$, găsim în modul indicat aici numai o soluţie particulară a ecuaţiei (283) şi anume funcţia $J_n(x)$, numită funcţia Bessel de speţa întîi şi ordinul întreg n

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \tag{305}$$

care este de fapt o serie de puteri, convergentă pe toată axa reală şi chiar în tot planul complex. În particular, în cazul $n=0$, pentru ecuaţia

$$xy''(x)+y'(x)+xy(x)=0, \tag{306}$$

găsim soluţia particulară $J_0(x)$, dată de

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{307}$$

Dacă $\nu=n=$ întreg $\geqslant 0$, nu mai putem afla o a doua soluţie particulară pentru (283) prin procedeul folosit. În adevăr, luînd $r=-n$, din relaţia de recurenţă (289) pentru $k=2n$, găsim

$$[(-n+2n)^2-n^2]c_{2n}=-c_{2n-2}, \tag{308}$$

care dă ceva imposibil, căci $c_{2n-2}\neq 0$. Dacă am considera în mod formal seria

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}, \tag{309}$$

obţinută din expresia lui $J_{-\nu}(x)$ prin înlocuirea lui ν cu n, pentru ca ea să aibă sens, trebuie să facem convenţia, dealtfel pe deplin justificată, că

$$1/\Gamma(-n+k+1)=0 \text{ pentru } k=0,1,2,\ldots,n-1. \tag{310}$$

Notînd suma seriei (309) cu $J_{-n}(x)$, avem de fapt relaţia

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}. \tag{311}$$

Dacă punem $k=n+p$ şi folosim indicele de sumare $p\geqslant 0$, putem scrie

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(n+p)!p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}=(-1)^nJ_n(x), \tag{312}$$

care ne arată că $J_{-n}(x)$ este şi ea soluţie a ecuaţiei Bessel corespunzătoare lui $\nu=n$, dar nu este liniar independentă faţă de $J_n(x)$.

Se arată că în cazul $\nu=n=$ întreg $\geqslant 0$ se poate construi pentru ecuaţia lui Bessel o a doua soluţie, liniar independentă faţă de $J_n(x)$, notată $N_n(x)$ şi numită funcţia lui Neumann sau funcţia

lui Bessel de speța a doua și de ordin întreg $n \geqslant 0$. Soluția generală a ecuației

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-n^2)y(x)=0 \tag{313}$$

va fi atunci de forma

$$y(x)=c_1J_n(x)+c_2N_n(x), \tag{314}$$

cu c_1 și c_2 constante arbitrare. Nu vom scrie expresia funcției $N_n(x)$ în cazul general, fiind destul de complicată. În cazul $n=0$, avem

$$\pi N_0(x)=2J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+c\right)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right),$$

$$x>0, \tag{315}$$

unde c este constanta lui Euler, adică

$$c=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right). \tag{316}$$

Importantă pentru aplicații este relația de recurență între trei funcții Bessel de speța întîi cu indicii consecutivi $\nu-1$, ν, $\nu+1$, și anume

$$\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x),\ x>0. \tag{317}$$

Pentru demonstrație, vom arăta în prealabil că

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu J_\nu(x))=x^\nu J_{\nu-1}(x),\quad x>0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu}J_\nu(x))=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x),\quad x>0, \tag{318}$$

În adevăr, deoarece

$$x^\nu J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^\nu}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2k} \tag{319}$$

prin derivare se va găsi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu J_\nu(x))=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^\nu(\nu+k)}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2k-1}= \tag{320}$$

$$=x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k}=x^\nu J_{\nu-1}(x),\quad x>0,$$

iar cealaltă relație se justifică la fel cu aceasta. Dacă transcriem relațiile (318) în forma

$$\nu x^{\nu-1}J_\nu(x)+x^\nu J'_\nu(x)=x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{321}$$

$$-\nu x^{-\nu-1}J_\nu(x)+x^{-\nu}J'_\nu(x)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x),$$

sau încă mai convenabil

$$\frac{\nu}{x}J_\nu(x)+J'_\nu(x)=J_{\nu-1}(x) \tag{322}$$

$$-\frac{\nu}{x}J_\nu(x)+J'_\nu(x)=-J_{\nu+1}(x),$$

obținem prin scădere formula cerută (317). Dacă adunăm relațiile din (322), găsim derivata funcției $J_\nu(x)$ și anume

$$J'_\nu(x)=\frac{1}{2}(J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)),\quad x>0. \tag{323}$$

Putem arăta acum că funcțiile Bessel de speța întîi și ordin semiîntreg $Jn+\frac{1}{2}(x)$ sînt funcții elementare. În adevăr, plecînd de la definiție, se verifică ușor că

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,\ J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\ x>0 \tag{324}$$

și folosind relația de recurență (317) se ajunge la concluzia dorită.

Exercițiu. Să se scrie soluția generală a ecuației

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)y(x)=0,\quad x>0.$$

Rezolvare. Aceasta este ecuația Bessel cu $\nu=3/2$. Soluția ei generală este $y=c_1J_{3/2}(x)+c_2J_{-3/2}(x)$ cu c_1 și c_2 constante arbitrare. Din relația (317) în care facem $\nu=1/2$, apoi $\nu=-1/2$ găsim dacă ținem seama și de (324) că

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right),\ J_{-\frac{3}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x}+\sin x\right).$$

Ne vom ocupa acum de proprietatea de ortogonalitate a funcțiilor Bessel de speța întîi, deoarece aceasta se folosește mult

în aplicații. Vom presupune că indicele ν este $\geqslant 0$ și vom considera funcția $y(x)=J_\nu(\lambda x)$, unde $\lambda>0$ este o constantă. Dacă derivăm această funcție, găsim

$$y'(x)=\lambda J'_\nu(\lambda x),\quad y''(x)=\lambda^2 J''_\nu(\lambda x),\quad x>0 \tag{325}$$

și în același timp este îndeplinită condiția

$$\lambda^2x^2J''_\nu(\lambda x)+\lambda xJ'_\nu(\lambda x)+(\lambda^2x^2-\nu^2)J_\nu(\lambda x)=0,\quad x>0, \tag{326}$$

care se obține din ecuația lui Bessel prin înlocuirea lui x cu λx. Ultimele două relații ne spun că funcția $y(x)=J_\nu(\lambda x)$ verifică ecuația diferențială

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(\lambda^2x^2-\nu^2)y(x)=0. \tag{327}$$

Fie acum $\lambda\neq\mu$ două valori pozitive oarecare. Notînd $y(x)=J_\nu(\lambda x)$ și $z(x)=J_\nu(\mu x)$ și avînd în vedere că

$$\begin{aligned} xy''(x)+y'(x)-\frac{\nu^2}{x}y(x)&=-\lambda^2xy(x), & x>0\\ xz''(x)+z'(x)-\frac{\nu^2}{x}z(x)&=-\mu^2xz(x), & x>0, \end{aligned} \tag{328}$$

obținem, prin adunarea primei ecuații înmulțită cu $-z(x)$ cu a doua ecuație înmulțită cu $y(x)$, că

$$x(yz'-zy')'+(yz'-zy')=(\lambda^2-\mu^2)xy(x)z(x),\quad x>0, \tag{329}$$

relația care poate fi scrisă în forma echivalentă

$$\frac{d}{dx}[x(yz'-zy')]=(\lambda^2-\mu^2)xy(x)z(x),\quad x>0. \tag{330}$$

Dacă se admite că λ și μ sînt rădăcini pozitive ale funcției $J_\nu(x,)$ se obține prin integrarea relației precedente pe $[0, 1]$ că

$$(\lambda^2-\mu^2)\int_0^1 xy(x)z(x)dx=y(1)z'(1)-z(1)y'(1)=0, \tag{331}$$

deoarece $y(1)=J_\nu(\lambda)=0$ și $z(1)=J_\nu(\mu)=0$. În concluzie, putem spune că am demonstrat

Propoziția 1.21. *Fie $\lambda\neq\mu$ două rădăcini pozitive ale funcției Bessel $J_\nu(x)$ cu $\nu\geqslant 0$. Atunci are loc relația de ortogonalitate*

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda x)J_\nu(\mu x)dx=0. \tag{332}$$

Se mai spune că cele două funcții sînt ortogonale cu ponderea x pe intervalul $[0, 1]$. Se poate demonstra că funcția $J_\nu(x)$ are o infinitate numărabilă de rădăcini pozitive, care pot fi așezate într-un șir monoton crescător cu limita $+\infty$. Fie deci

$$0<\lambda_1<\lambda_2\ldots<\lambda_n<\ldots \tag{333}$$

rădăcinile pozitive ale funcției $J_\nu(x)$, parametrul ν fiind presupus $\geqslant 0$. Rezultatul stabilit spune că funcțiile

$$J_\nu(\lambda_1x),\ J_\nu(\lambda_2x),\ldots,J_\nu(\lambda_nx),\ldots \tag{334}$$

formează un sistem ortogonal cu ponderea x pe intervalul $[0, 1]$.

Să mai calculăm și integrala

$$\int_0^1 xJ^2_\nu(\lambda_nx)dx,\quad (\nu\geqslant 0), \tag{335}$$

unde λ_n este una din rădăcinile (333). Întorcîndu-ne la relația (330) în care luăm $\lambda=\lambda_n$ și $\mu>0$ oarecare, găsim

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_nx)J_\nu(\mu x)dx=\frac{J_\nu(\mu)J'_\nu(\lambda_n)\lambda_n}{(\mu-\lambda_n)(\mu+\lambda_n)},\quad \mu\neq\lambda_n. \tag{336}$$

Făcînd pe $\mu\to\lambda_n$ și folosind definiția derivatei, găsim

$$\lim_{\mu\to\lambda_n}\frac{J_\nu(\mu)}{\mu-\lambda_n}=\lim_{\mu\to\lambda_n}\frac{J_\nu(\mu)-J_\nu(\lambda_n)}{\mu-\lambda_n}=J'_\nu(\lambda_n). \tag{337}$$

Apoi din a doua relație (322), în care facem $x=\lambda_n$, găsim $J'_\nu(\lambda_n)=-J_{\nu+1}(\lambda_n)$. În concluzie, putem spune că are loc

Propoziția 1.22. *Fie $\lambda_n>0$ o rădăcină a funcției Bessel $J_\nu(x)$ cu $\nu\geqslant 0$. Atunci*

$$\int_0^1 xJ^2_\nu(\lambda_nx)dx=\frac{1}{2}J^2_{\nu+1}(\lambda_n). \tag{338}$$

Dacă $f=f(x)$ este o funcție definită pe $[0, 1]$ și satisfăcînd anumite proprietăți de regularitate, ne punem problema dezvol-

tării ei în serie după sistemul ortogonal (334). Mai precis, căutăm o dezvoltare de forma

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(\lambda_n x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{339}$$

Înmulțind această egalitate cu $xJ_\nu(\lambda_n x)$, (n=fixat) și integrînd pe [0, 1], vom găsi

$$c_n\int_0^1 xJ_\nu^2(\lambda_n x)\,dx=\int_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_n x)\,dx,\ n=1, 2, \ldots \tag{340}$$

ceea ce ne va duce la concluzia că coeficienții c_n sînt unic determinați și au valoarea

$$c_n=\frac{2}{J_{\nu+1}^2(\lambda_n)}\int_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_n x)\,dx,\ n=1, 2, \ldots \tag{341}$$

Definiția 1.10. Dacă pe un interval $[a, b]$ există numai un număr finit de discontinuități de prima speță a funcțiilor $f(x)$ și $f'(x)$, vom spune că $f=f(x)$ este netedă pe porțiuni în acel interval.

Reamintim că un punct x_0 este discontinuitate de prima speță pentru o funcție $f=f(x)$, dacă există și sînt finite ambele limite laterale $f(x_0+0)$ și $f(x_0-0)$.

Cu aceste precizări vom enunța (fără demonstrație) următoarea

Propoziția 1.23. *Dacă funcția $f=f(x)$ este netedă pe porțiuni pe intervalul* [0, 1], *atunci pentru orice $x\in(0, 1)$ suma seriei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(\lambda_n x), \quad (\nu\geqslant 0), \tag{342}$$

în care coeficienții c_n sînt dați de (341), *coincide cu* $(1/2)(f(x+0)+f(x-0))$. *În particular, în punctele de continuitate, suma seriei* (342) *este* $f(x)$.

În punctul $x=1$, suma seriei (342) este în mod evident egală cu 0. De asemenea, pentru $\nu>0$ suma acestei serii este nulă și în punctul $x=0$, deoarece $J_\nu(0)=0$ în acest caz.

În anumite probleme concrete intervine sistemul de funcții

$$J_\nu\left(\frac{\lambda_1 x}{a}\right),\ J_\nu\left(\frac{\lambda_2 x}{a}\right),\ \ldots,\ J_\nu\left(\frac{\lambda_n x}{a}\right),\ \ldots\ (\nu\geqslant 0), \tag{343}$$

definite pentru $0\leqslant x\leqslant a$, unde (λ_n) este ca și mai înainte, șirul rădăcinilor pozitive ale funcției $J_\nu(x)$. Acesta este un sistem ortogonal cu ponderea x pe intervalul $[0, a]$, iar dacă $f=f(x)$ este netedă pe porțiuni în acest interval, putem scrie dezvoltarea

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu\left(\frac{\lambda_n x}{a}\right),\ \text{unde}\ c_n=\frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(\lambda_n)}\cdot \tag{344}$$

$$\cdot\int_0^a xf(x)J_\nu\left(\frac{\lambda_n x}{a}\right)dx,$$

valabilă în toate punctele de continuitate. În punctele de discontinuitate, suma seriei este egală cu semisuma limitelor laterale $(1/2)(f(x+0)+f(x-0))$.

Cu scopul, pe de o parte, de a face o aplicație a teoriei expuse, iar pe de altă parte de a arăta cît de natural se introduc funcțiile Bessel, să considerăm următoarea

Problemă. Să se afle repartiția potențialului în interiorul unui cilindru circular drept închis la baza inferioară, știind că a) pe suprafața laterală și pe baza inferioară, potențialul este nul; b) la baza superioară, aplicăm un capac circular plan, pe care potențialul este constant și egal cu u_0.

Rezolvare. Din punct de vedere matematic, avem de integrat ecuația potențialului (Laplace)

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{345}$$

cu condițiile că pe frontiera domeniului definit prin

$$D=\{(x, y, z);\ x^2+y^2\leqslant a^2,\ 0\leqslant z\leqslant h\}, \tag{346}$$

potențialul $u=u(x, y, z)$ satisface condițiile impuse, adică se anulează pe suprafața laterală și pe baza inferioară ($z=0$) și ia valoarea u_0 pe baza superioară (pentru care $z=h$). Se înțelege că aici x, y, z sînt coordonatele carteziene în spațiu. Problema se

simplifică foarte mult, dacă vom trece la coordonatele cilindrice în spațiu, legate de cele obișnuite prin relațiile

(347) $$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z.$$

Folosind aceste coordonate, ecuația (345) se scrie în forma echivalentă

(348) $$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

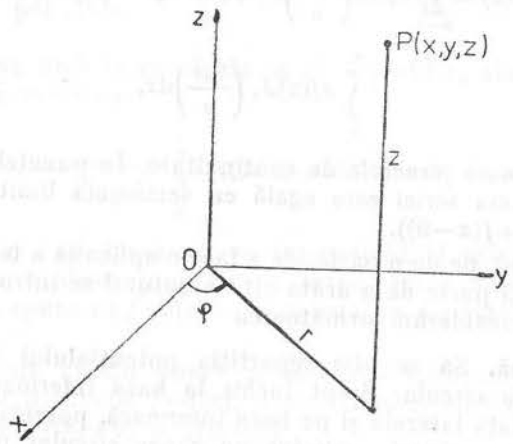

Fig. 1.1

dar dacă vom presupune că u nu depinde de φ, această ecuație devine

(349) $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

iar condițiile la limită pe care trebuie să le satisfacă funcția $u=u(r, z)$ se scriu acum foarte simplu și anume

(350) $$u(r, 0)=0,\quad u(a, z)=0,\quad u(r, h)=u_0.$$

Am notat cu a raza cilindrului și cu h înălțimea sa. Utilizînd separarea variabilelor, adică căutînd o soluție particulară pentru (349)

de forma a $u=R(r)Z(z)$, în care funcțiile R și Z trebuie determinate, ajungem după înlocuirea în ecuație la condiția

(351) $$\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{R(r)}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\lambda^2=\text{constant},\quad \lambda>0.$$

Aceasta poate fi scrisă în forma echivalentă

(352) $$rR''(r)+R'(r)+\lambda^2 rR(r)=0,\quad Z''(z)-\lambda^2 Z(z)=0$$

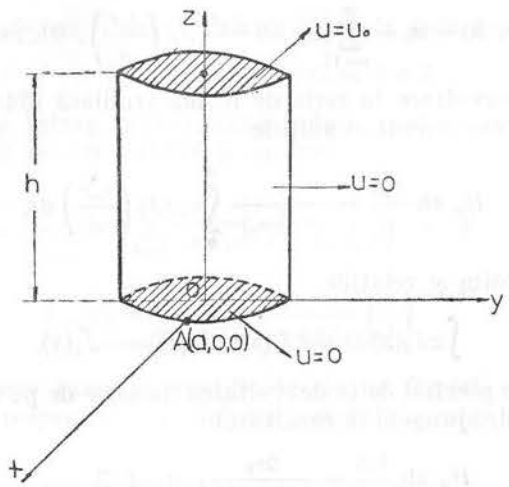

Fig. 1.2

și se vede că prima ecuație de aici este verificată de funcția $R(r)=J_0(\lambda r)$. Deoarece vrem ca $R(a)=0$, vom lua constanta $\lambda=\lambda_n/a$, unde $\lambda_n=$ rădăcină pozitivă a funcției $J_0(x)$. Cu valoarea găsită pentru λ, vom avea din a doua ecuație (352) că

(353) $$Z(z)=A\,\mathrm{ch}\frac{\lambda_n z}{a}+B\,\mathrm{sh}\frac{\lambda_n z}{a},$$

unde A și B sînt constante. Deoarece vrem ca $Z(0)=0$, vom lua $B=0$ și în concluzie, pentru fiecare $n=$ natural, vom avea o soluție particulară a ecuației (349) de forma

(354) $$u_n(r, z)=B_n J_0\left(\frac{\lambda_n r}{a}\right)\mathrm{sh}\frac{\lambda_n z}{a},$$

care satisface în plus condițiile $u_n(r, 0)=0$, $u_n(a, z)=0$. Așa cum se știe din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, vom căuta soluția problemei (349)+(350) sub forma unei serii

$$u(r, z)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\frac{\lambda_n r}{a}\right) \operatorname{sh}\frac{\lambda_n z}{a}, \tag{355}$$

Coeficienții B_n se află din condiția $u(r, h)=u_0$, pe care încă nu am folosit-o. Făcînd $z=h$ în relația precedentă, ajungem la

$$u(r, h)=u_0=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh}\frac{\lambda_n h}{a} J_0\left(\frac{\lambda_n r}{a}\right), \quad 0<r<a, \tag{356}$$

adică la o dezvoltare în serie de forma studiată (344). Vom avea deci pentru coeficienți condițiile

$$B_n \operatorname{sh}\frac{\lambda_n h}{a}=\frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_n)}\int_0^a u_0 r J_0\left(\frac{\lambda_n r}{a}\right) dr, \tag{357}$$

iar dacă folosim și relațiile

$$\int x J_0(x)dx=xJ_1(x), \quad J_0'(x)=-J_1(x), \tag{358}$$

care se deduc plecînd de la dezvoltarea în serie de puteri a acestor funcții Bessel, ajungem la rezultatul

$$B_n \operatorname{sh}\frac{\lambda_n h}{a}=\frac{2u_0}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}, \quad n=1, 2, \ldots \tag{359}$$

Înlocuind în (355), găsim soluția problemei inițiale în forma

$$u(r, z)=2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n J_1(\lambda_n)\operatorname{sh}\frac{\lambda_n h}{a}} J_0\left(\frac{\lambda_n r}{a}\right)\operatorname{sh}\frac{\lambda_n z}{a}. \tag{360}$$

Uneori se întîlnește și așa-numita ecuație modificată a lui Bessel

$$x^2y''(x)+xy'(x)-(x^2+\nu^2)y(x)=0, \quad x>0, \tag{361}$$

unde $\nu\geqslant 0$ este o constantă. Procedînd ca și cu ecuația (283), adică punînd

$$y(x)=x^r\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0\neq 0, \tag{362}$$

unde exponentul r și coeficienții c_k, $k=0, 1, 2, \ldots$ trebuie determinați, vom ajunge la condiția

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(r+k)^2-\nu^2]c_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2}, \tag{363}$$

care este analoagă cu (287). Judecînd ca și în cazul la care ne-am referit, vom obține

$$(r^2-\nu^2)c_0=0 \text{ și } [(r+1)^2-\nu^2]c_1=0, \tag{364}$$

relația de legătură între coeficienți fiind de data aceasta

$$[(r+k)^2-\nu^2]c_k=c_{k-2}, \quad k\geqslant 2. \tag{365}$$

În cazul $\nu\neq$ întreg, găsim două soluții particulare liniar independente ale ecuației (361) și anume

$$I_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \text{ și} \tag{366}$$

$$I_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k},$$

care se numesc funcțiile modificate ale lui Bessel, de speța întîi și ordin ν, respectiv $-\nu$. Soluția generală a ecuației (361) este deci

$$y(x)=c_1 I_\nu(x)+c_2 I_{-\nu}(x), \quad x>0, \tag{367}$$

unde c_1 și c_2 sînt constante arbitrare reale.

În cazul $\nu=n=$ întreg $\geqslant 0$, se găsește numai o soluție în forma unei serii de puteri și anume

$$I_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \tag{368}$$

convergentă pentru orice x real și care se numește funcția modificată a lui Bessel de speța întîi și ordin întreg n.

Exercițiu. Să se scrie soluția generală a ecuației

$$x^2y''(x)+xy'(x)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)y(x)=0, \quad x>0.$$

Rezolvare. Vom avea $y(x)=c_1 I_{1/2}(x)+c_2 I_{-1/2}(x)$, unde c_1 şi c_2 sînt constante arbitrare, iar

$$I_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{ch}x,\quad I_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sh}x,\quad x>0.$$

Pentru a ne convinge de utilitatea funcţiilor Bessel modificate, să considerăm următoarea

Problemă. Să se afle repartiţia potenţialului în interiorul unui cilindru circular drept închis la baze, ştiind că:

a) pe ambele baze, potenţialul are valoarea 0;

b) pe suprafaţa laterală, potenţialul este o funcţie dată de z.

Rezolvare. Avem de integrat ecuaţia lui Laplace $\Delta u=0$, scrisă în forma (349), cu condiţiile $u(r, 0)=0$, $u(r, h)=0$, $u(a, z)=f(z)$ pentru $0<z<h$. Am notat ca de obicei cu a raza cilindrului şi cu h înălţimea sa. Scriind $u=R(r)Z(z)$ şi separînd variabilele vom ajunge la condiţia

$$\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{R(r)}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=\lambda^2=\text{constant},\quad \lambda>0, \tag{369}$$

sau în formă echivalentă

$$rR''(r)+R'(r)-\lambda^2 rR(r)=0,\quad Z''(z)+\lambda^2 Z(z)=0. \tag{370}$$

De aici deducem că $Z(z)=A\cos\lambda z+B\sin\lambda z$ şi deoarece noi vrem ca $Z(0)=Z(h)=0$, vom lua $A=0$ şi $\lambda=\lambda_n=n\pi/h$, unde n este număr natural. Prima din ecuaţiile (370) este verificată de funcţia $I_0(\lambda r)$, deoarece ea se reduce imediat la ecuaţia modificată Bessel cu $\nu=0$. În concluzie, pentru fiecare $n=$natural, avem o soluţie particulară

$$u_n(r, z)=B_n I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\sin\frac{n\pi z}{h} \tag{371}$$

a ecuaţiei $\Delta u=0$, soluţie care satisface în mod evident şi condiţiile la limite $u_n(r, 0)=u_n(r, h)=0$. Aplicăm din nou principiul „suprapunerii soluţiilor", adică căutăm soluţia problemei în forma

$$u(r, z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\sin\frac{n\pi z}{h},\quad 0<r<a,\ 0<z<h \tag{372}$$

şi făcînd $r=a$, vom vedea că B_n se determină în mod unic din dezvoltarea

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)\sin\frac{n\pi z}{h},\quad 0<z<h, \tag{373}$$

adică din dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $f=f(z)$. În mod evident, va rezulta

$$B_n I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)=\frac{2}{h}\int_0^h f(z)\sin\frac{n\pi z}{h}\,dz,\quad n=1, 2, \ldots \tag{374}$$

deci, coeficienţii B_n sînt cunoscuţi. Putem afirma că soluţia problemei propuse este seria (372), în care coeficienţii sînt daţi de (374).

În legătură cu funcţiile lui Bessel şi aplicaţiile lor în diverse probleme de fizică sau tehnică, există o literatură considerabilă.

Să ne ocupăm de funcţia generatoare a funcţiilor Bessel de speţa întîi şi ordin întreg.

Teorema 1.11. *Are loc dezvoltarea în serie*

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n \tag{375}$$

pentru orice x şi t complecşi, $t\neq 0$.

Demonstraţie. Pentru orice x şi t complecşi, putem scrie

$$e^{\frac{x}{2}t}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i t^i}{2^i\cdot i!},\quad e^{-\frac{x}{2}t^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k t^{-k}}{2^k\cdot k!}, \tag{376}$$

ultima în ipoteza $t\neq 0$. Făcînd produsul Cauchy al celor două serii de puteri din relaţia precedentă, vom avea

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{i+k}t^{i-k}}{2^{i+k}i!k!}. \tag{377}$$

Dacă fixăm un întreg $n\geqslant 0$, ne punem întrebarea care este coeficientul lui t^n în dezvoltarea precedentă. Dacă $i-k=n$, înseamnă că $i=n+k$, k putînd lua toate valorile 0, 1, 2, ...
Acest coeficient va fi deci suma seriei

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k}(n+k)!k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \tag{378}$$

adică va fi egal cu $J_n(x)$. Dacă fixăm acum un întreg $-n<0$ şi impunem ca $i-k=-n$, va rezulta $i=k-n$, k putînd lua toate valorile n, $n+1, \ldots$ Coeficientul lui t^{-n} va fi deci suma seriei

$$(379)\qquad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{-n+2k}}{2^{-n+2k}(k-n)!k!} = (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} =$$

$$= (-1)^n J_n(x),$$

adică funcţia $J_{-n}(x)$, dacă ne amintim de formula (312). În concluzie, putem spune că oricare ar fi n întreg (pozitiv, negativ sau zero) coeficientul lui t^n în dezvoltarea funcţiei (375) este egal cu $J_n(x)$, Q.E.D.

Definiţia 1.11. Funcţia $\exp\left(\frac{x}{2}(t-t^{-1})\right)$ se numeşte funcţia generatoare a funcţiilor Bessel cu indice întreg $J_n(x)$.

Este evident că în (375) avem dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei generatoare în jurul punctului singular $t=0$. Este clar că x a jucat rolul unui parametru real sau complex. Dezvoltarea este valabilă în tot planul complex al variabilei t, mai puţin punctul $t=0$. Ştiind expresia coeficienţilor seriei Laurent, putem scrie

$$(380)\qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi j}\int_{|t|=1} exp\left(\frac{x}{2}(t-t^{-1})\right)\cdot t^{-n-1}\,dt,\ n=\text{întreg}.$$

Aceasta este o reprezentare integrală a funcţiei $J_n(x)$; integrala în formula precedentă are aceeaşi valoare pe orice curbă închisă care înconjoară punctul $t=0$, dar este preferabil să o facem pe cercul unitate $|t|=1$. Prin j s-a notat unitatea imaginară: $j^2=-1$.

Dacă în (380) vom lua reprezentarea parametrică $t=e^{j\varphi}$ pentru cercul unitate, vom obţine imediat că

$$(381)\qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{j(n\varphi - x\sin\varphi)}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi.$$

Judecînd exact ca în cazul prezentat aici, se demonstrează

Teorema 1.12. *Are loc dezvoltarea în serie*

$$(382)\qquad e^{\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \sum_{-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n,$$

prin orice x şi t complecşi, $t\neq 0$.

Funcţia $exp\left(\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})\right)$ se numeşte funcţia generatoare a funcţiilor Bessel modificate cu indice întreg $I_n(x)$. Seria (382) reprezintă dezvoltarea Laurent a funcţiei generatoare în jurul punctului singular $t=0$. Variabila x este un număr real sau complex, arbitrar. Folosind expresia coeficienţilor seriei Laurent, vom scrie

$$(383)\qquad I_n(x) = \frac{1}{2\pi j}\int_{|t|=1} exp\left(\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})\right)\cdot t^{-n-1}dt,\ n=\text{întreg oarecare}.$$

Dacă luăm pentru cercul unitate reprezentarea $t=e^{j\varphi}$, obţinem imediat

$$(384)\qquad I_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\varphi - n\varphi j}d\varphi,$$

valabilă pentru orice $n=$întreg. Reprezentările integrale (381) şi (384) se dovedesc utile la calcularea transformatei Laplace a funcţiilor Bessel cu indice întreg, aşa cum se va vedea în capitolul următor.

1.6. ECUAŢIA ŞI POLINOAMELE LUI HERMITE

Unele probleme de fizică teoretică conduc la studiul ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul doi, numită a lui Hermite

$$(385)\qquad y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0,$$

unde λ este o anumită constantă reală. Vom determina acele valori ale parametrului λ, pentru care ecuaţia (385) admite o soluţie particulară de forma unui polinom. Dacă vom impune condiţia ca seria

$$(386)\qquad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

să verifice ecuația (385), vom găsi

$$(387)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n+\lambda a_n]x^n=0,$$

care ne conduce la relația de recurență între coeficienți

$$(388)\qquad a_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}\,a_n,\quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

De aici se vede că dacă luăm $a_1=0$ și $a_0\neq 0$, seria (386) va conține numai puteri pare ale variabilei x, în timp ce dacă luăm $a_0=0$ și $a_1\neq 0$, seria (386) va conține numai puteri impare ale lui x. Dacă $\lambda=2n$, ecuația (385) care în acest caz ia forma

$$(389)\qquad y''(x)-2xy'(x)+2ny(x)=0$$

admite soluții de forma unui polinom de gradul n și anume

$$(390)\qquad \widetilde{H}_n(x)=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\ldots+a_nx^n,\quad (n\text{ par})$$

sau

$$(391)\qquad \widetilde{H}_n(x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\ldots+a_nx^n,\quad (n\text{ impar}).$$

Ținînd seama de relația (388), se poate vedea că atît în (390), cît și în (391) toți coeficienții sînt diferiți de zero. De asemenea, pentru o valoare fixă a lui n, polinoamele $\widetilde{H}_n(x)$ pot diferi între ele numai printr-un factor constant. Se mai poate observa că dacă $\lambda\neq 2n$, ecuația (385) nu admite soluții particulare de forma unui polinom.

Să considerăm acum funcția de două variabile independente x și t

$$(392)\qquad \varphi(x,\,t)=e^{2tx-t^2},$$

pe care să o dezvoltăm în serie Taylor în jurul punctului $t=0$, considerînd x un parametru fixat

$$(393)\qquad \varphi(x,\,t)=e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\,\frac{t^n}{n!}.$$

Este evident că coeficienții H_n sînt anumite funcții de x și că seria precedentă converge pentru orice t complex. După cum se știe, putem scrie

$$(394)\qquad H_n(x)=\left(\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}\right)_{t=0}=e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\,e^{-(t-x)^2}\right]_{t=0}.$$

Pe de altă parte, este evident că

$$(395)\qquad \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\,e^{-(t-x)^2}\right]_{t=0}=(-1)^n\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,e^{-(t-x)^2}\right]_{t=0}=(-1)^n\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,e^{-x^2},$$

așa că rezultă

$$(396)\qquad H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,e^{-x^2}=(-1)^ne^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)},\quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

de unde se vede că $H_n(x)$ sînt polinoame de gradul n în variabila x.

Definiția 1.12. Polinoamele $H_n(x)$ definite de formula (396) se numesc polinoamele lui Hermite.

Iată expresia primelor polinoame Hermite

$$H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x,\ H_2(x)=4x^2-2,\ H_3(x)=8x^3-12x,$$

$$(397)\qquad H_4(x)=16x^4-48x^2+12.$$

Vom arăta acum că $H_n(x)$ verifică ecuația diferențială (389), deci coincide cu polinomul $\widetilde{H}_n(x)$ dat de (390) sau (391), abstracție făcînd de un factor constant de proporționalitate. Plecînd de la relațiile evidente

$$(398)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=2t\varphi\ \text{ și }\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}+2(t-x)\varphi=0$$

și ținînd seama că

$$(399)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n'(x)\,\frac{t^n}{n!},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=\sum_{n=0}^{\infty}H_{n+1}(x)\,\frac{t^n}{n!},$$

găsim în primul rînd că

$$(400)\qquad H_n'(x)=2nH_{n-1}(x),\ H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0,$$

pentru orice $n=$număr natural. Prin derivarea ultimelor relații, se ajunge imediat la concluzia că pentru orice $n=$natural avem

$$(401)\qquad H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$$

și deoarece relația precedentă are loc și în cazul $n=0$, putem spune că am demonstrat

Propoziția 1.24. *Polinomul $H_n(x)$ dat de* (396) *este soluție particulară a ecuației lui Hermite* (389).

În continuare, vom demonstra

Propoziția 1.25. *Polinoamele lui Hermite satisfac relația de ortogonalitate*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases} \tag{402}$$

Demonstrație. Dacă $m > n$ și ținem seamă că

$$e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = (-1)^m (e^{-x^2})^{(m)} H_n(x), \tag{403}$$

în urma unei integrări repetate prin părți a acestei expresii, ajungem la concluzia că, abstracție făcînd de un factor constant, integrala (402) este egală cu integrala pe axa reală a funcției $exp\,(-x^2) H_n^{(m)}(x)$, funcție care este însă identic nulă. Prin urmare, în acest caz (402) este adevărată. Justificarea este aceeași și în cazul $m < n$. Presupunînd $m = n$, vom scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x)\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2})^{(n)} H_n(x)\,dx \tag{404}$$

și integrînd repetat prin părți în dreapta, ajungem la concluzia că

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2})^{(n)} H_n(x)\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^{(n)}(x)\,dx. \tag{405}$$

Deoarece coeficientul termenului de grad maxim în $H_n(x)$ este egal cu 2^n și integrala pe axa reală a funcției e^{-x^2} este egală cu $\sqrt{\pi}$, rezultă că (402) este adevărată și în cazul $m = n$, deci este adevărată în toate cazurile.

Definiția 1.13. Funcțiile

$$\psi_n(x) = \frac{H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{406}$$

se numesc funcțiile normate ale lui Hermite.

Propoziția 1.26. *Funcțiile* (406) *satisfac condiția de normare*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{407}$$

și ecuația diferențială de ordinul doi

$$y''(x) + [(2n+1) - x^2] y(x) = 0. \tag{408}$$

Demonstrație. Relația (407) rezultă direct din (402), în care se ia $m = n$. După ce înmulțim (401) cu factorul $exp\,(-x^2/2)$, obținem o relație care poate fi scrisă în forma

$$\left(H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' + [(2n+1) - x^2] H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0, \tag{409}$$

din care rezultă că funcția normată $\psi_n(x)$ satisface (408).

Vom vedea în exemplul care urmează, cum se aplică polinoamele Hermite într-un caz concret.

Oscilatorul liniar. Ecuația lui Schrödinger pentru un astfel de oscilator are forma

$$\frac{h^2}{2m} \psi''(x) + (E - V)\psi(x) = 0, \tag{410}$$

în care h este constanta lui Planck, m este masa particulei, potențialul V are valoarea $kx^2/2$, iar E are rolul unui parametru care trebuie determinat, încît funcția $\psi(x)$ să satisfacă condiția de normare (407). Ecuația care trebuie studiată este deci

$$\frac{h^2}{2m} \psi''(x) + \left(E - \frac{kx^2}{2}\right)\psi(x) = 0 \tag{411}$$

și dacă facem notațiile

$$\lambda = \frac{2mE}{h^2}, \quad \alpha^2 = \frac{mk}{h^2}, \tag{412}$$

ea poate fi scrisă în forma simplificată

$$\psi''(x) + (\lambda - \alpha^2 x^2)\psi(x) = 0. \tag{413}$$

Cu schimbarea de funcție $\psi(x) = u(\beta x)$, unde $u = u(t)$ este noua funcție necunoscută, ecuația precedentă devine

$$u''(\beta x) + \left(\frac{\lambda}{\beta^2} - \frac{\alpha^2 x^2}{\beta^2}\right) u(\beta x) = 0. \tag{414}$$

Vom determina constanta β din condiția $\alpha x/\beta = \beta x$, care duce la concluzia că $\beta = \sqrt{\alpha}$. Dacă notăm $t = \sqrt{\alpha}x$, ecuația pe care o satisface funcția u este

$$u''(t) + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - t^2\right) u(t) = 0. \tag{415}$$

Avînd în vedere ecuația (408), deducem că valorile pe care le va lua parametrul λ sînt $\lambda_n = (2n+1)\alpha$, unde n ia pe rînd valorile $0, 1, 2, \ldots$. Pentru fiecare n fixat, avem soluția ecuației (415) dată de

$$u_n(t) = \frac{H_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} \quad \text{cu} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_n^2(t)\,dt = 1. \tag{416}$$

Revenind la ecuația (411) de la care am plecat, putem spune că valorile parametrului E sînt

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}(2n+1)\alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{417}$$

iar funcțiile normate corespunzătoare sînt

$$\psi_n(x) = \sqrt[4]{\alpha}\,\frac{H_n(\sqrt{\alpha}x)\,e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{418}$$

constanta pozitivă α fiind cea dată de relația (412).

Observație. Polinoamele

$$K_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{419}$$

poartă de asemenea numele de polinoame Hermite. În legătură cu ele, vom enunța cîteva exerciții interesante.

Exercițiul 1. Să se demonstreze relația

$$K_{n+1}(x) = xK_n(x) - K_n'(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{420}$$

Exercițiul 2. Să se arate că coeficientul lui x^n din polinomul $K_n(x)$ este egal cu 1 și că are loc relația

$$K_n(-x) = (-1)^n K_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{421}$$

care ne spune că polinoamele de indice par sînt funcții pare, iar cele de indice impar sînt funcții impare.

Exercițiul 3. Să se demonstreze relația de recurență

$$K_{n+1}(x) = xK_n(x) - nK_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{422}$$

a polinoamelor Hermite $K_n(x)$.

Exercițiul 4. Să se arate că pentru $0 < m \leqslant n$, are loc formula

$$K_n^{(m)}(x) = n(n-1)\ldots(n-m+1)K_{n-m}(x). \tag{423}$$

Indicație. Din (420) și (421) se obține $K_n'(x) = nK_{n-1}(x)$, oricare ar fi n = natural. Aplicarea repetată a acestei formule ne conduce la concluzia dorită.

Exercițiul 5. Să se arate că polinoamele $K_n(x)$ satisfac ecuația diferențială

$$y''(x) - xy'(x) + ny(x) = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{424}$$

Indicație. Scriem $y(x) = K_n(x)$, $y'(x) = nK_{n-1}(x)$ și $y''(x) = n(n-1)K_{n-2}(x)$ pentru cazul $n \geqslant 2$. Folosim apoi formula de recurență (422) pentru a obține concluzia dorită. În cazurile $n = 0$ și $n = 1$, verificarea se face direct.

Exercițiul 6. Să se demonstreze relația de ortogonalitate

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} K_m(x)K_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \sqrt{2\pi}\,n!, & m = n. \end{cases} \tag{425}$$

Exercițiul 7. Să se arate că $\varphi(x, t) = e^{tx - \frac{t^2}{2}}$ este funcția generatoare a polinoamelor $K_n(x)$, adică

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{426}$$

oricare ar fi x și t reali sau complecși.

Indicație. Se va scrie

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(x)\,\frac{t^n}{n!} \tag{427}$$

și se va obține pentru $k_n(x)$ aceeași relație de recurență ca și pentru $K_n(x)$. Deoarece $k_0(x)=1$ și $k_1(x)=x$, rezultă coincidența $k_n(x)=K_n(x)$ pentru orice indice $n\geqslant 0$.

Exercițiul 8. Să se arate că între polinoamele lui Hermite $H_n(x)$ și $K_n(x)$, există legătura

$$H_n(x)=2^{\frac{n}{2}}K_n(x\sqrt{2}),\quad n=0,1,2,\ldots \tag{428}$$

Rezolvare. Dacă în dezvoltarea (426) înlocuim pe x cu $x\sqrt{2}$ și pe t cu $t\sqrt{2}$, obținem

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x\sqrt{2})\frac{2^{\frac{n}{2}}t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}\cdot \tag{429}$$

adevărată pentru orice valori ale variabilelor x și t. Din unicitatea dezvoltării în serie de puteri, obținem relația (428).

CAPITOLUL 2

CALCUL OPERAȚIONAL

2.1. TRANSFORMATA LAPLACE – DEFINIȚIE ȘI PROPRIETĂȚI

Ideea de bază a calculului operațional constă în introducerea așa-numitelor transformări integrale. Marele avantaj al acestor metode constă în aceea că reduce studiul unor ecuații funcționale mai complicate la rezolvarea unor ecuații algebrice, care, cel puțin din punct de vedere teoretic, sînt mult mai simple decît primele.

Vom începe prin a preciza clasa funcțiilor pentru care se poate defini transformata Laplace. Acestea se vor numi funcții original. Anume, vom spune că funcția complexă de variabilă

reală $f(t)=f_1(t)+jf_2(t)$ definită pentru $t\in(-\infty, \infty)$ este o funcție original, dacă

(i) $f(t)=0$ pentru $t<0$,

(ii) pe fiecare interval finit al axei reale, $f=f(t)$ are cel mult un număr finit de discontinuități de speța întîia.
(iii) există două numere reale M și s, astfel încît

(1) $$|f(t)|\leqslant Me^{st} \quad \text{pentru } t\geqslant 0.$$

Este evident că dacă o funcție $f=f(t)$ satisface majorarea (1) pentru o anumită valoare a lui s, cu atît mai mult o va satisface pentru orice valoare $s'>s$. Cea mai bună caracterizare a creșterii modulului funcției $f=f(t)$ o va da însă marginea inferioară a numerelor reale s pentru care are loc o majorare de forma (1). Vom numi această margine exponent de creștere a funcției date. Pentru o funcție original, exponentul de creștere poate fi un număr finit sau $-\infty$.

Exemplul 1. Pentru funcția

(2) $$f(t)=\begin{cases} 0 , & t<0 \\ e^t , & t\geqslant 0, \end{cases}$$

exponentul de creștere este 1, deoarece majorarea (1) are loc cu orice $s\geqslant 1$, dar nu poate avea loc pentru nici o valoare $s<1$.

Exemplul 2. Pentru funcția

(3) $$f(t)=\begin{cases} 0 , & t\in(0, 1) \\ 1 , & t\in(0, 1), \end{cases}$$

exponentul de creștere este $-\infty$, deoarece pentru orice $s<0$ avem:

(4) $$|f(t)|\leqslant M e^{st},\ t\geqslant 0, \text{ unde } M=e^{-s}.$$

Exemplul 3. Funcția

(5) $$f(t)=\begin{cases} 0 , & t<0 \\ e^{t^2} , & t\geqslant 0, \end{cases}$$

nu este o funcție original, deoarece condiția (iii) nu este îndeplinită.

După cum s-a văzut din aceste exemple, în expresia $f(t)=f_1(t)+jf_2(t)$ nu este exclus cazul $f_2(t)\equiv 0$ și atunci $f=f(t)$ este cu valori reale.

Transformata Laplace a unei funcții original se definește prin relația

(6) $$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t, \quad p=\text{complex}$$

și este o funcție de variabila complexă p. Dacă notăm cu s_0 exponentul de creștere a funcției f, integrala (6) este absolut convergentă pentru $\mathrm{Re}\, p>s_0$, deci $F=F(p)$ este definită cel puțin în semiplanul $\mathrm{Re}\, p>s_0$. În adevăr, dacă scriem $p=x+jy$ și presupunem că $x>s_0$, luînd $\varepsilon>0$ suficient de mic încît $\beta=x-s_0-\varepsilon>0$, putem scrie pe de o parte

(7) $$|f(t)|\leqslant Me^{(s_0+\varepsilon)t}, \quad t\geqslant 0,$$

iar pe de altă parte

(8) $$|e^{-pt}f(t)|=e^{-xt}|f(t)|\leqslant M\, e^{-\beta t}, \quad t\geqslant 0,$$

de unde rezultă afirmația făcută. Dacă $s_0=-\infty$, atunci domeniul de definiție al lui $F=F(p)$ coincide cu întreg planul complex. Astfel, pentru funcția din exemplul 2, avem

(9) $$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 e^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{1}{p}(1-e^{-p})$$

și aceasta este o funcție olomorfă în tot planul, căci $p=0$ este singularitate aparentă.

Observația 1. Se impune să facem distincție între domeniul de convergență al integralei Laplace (6) și domeniul de definiție al funcției $F=F(p)$, care, în general vorbind, este mai amplu. De exemplu, pentru funcția lui Heaviside, numită și funcția unitate

(10) $$\theta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0, \end{cases}$$

avem, în mod evident

(11) $$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\theta(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{1}{p},$$

dar aceasta numai pentru $\mathrm{Re}\, p>0$, în timp ce domeniul de definiție al funcției $1/p$ coincide cu întreg planul complex, mai puțin punctul $p=0$.

Observația 2. Pentru a scrie că $F(p)$ este transformata (imaginea) funcției $f(t)$, putem folosi unul din simbolurile

$$L\{f(t)\}=F(p) \quad \text{sau} \quad f(t)\leftrightarrow F(p). \tag{12}$$

Citeodată, se scrie alături de aceasta și $\mathrm{Re}p>s_0$, pentru a se pune mai bine în evidență numerele complexe p care le avem în vedere. În alte cărți, se folosesc și alte simboluri în afara celor din (12).

Relativ la funcția unitate, putem deci scrie

$$\theta(t)\leftrightarrow\frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}p>0, \tag{13}$$

sau chiar, deoarece nu este pericol de confuzie

$$1\leftrightarrow\frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}p>0. \tag{14}$$

Pornind de la aceeași definiție (6), se poate extinde clasa funcțiilor pentru care există transformata lui Laplace, admițînd pentru $f=f(t)$ și discontinuități de speța a doua sau renunțînd la majorarea cerută de condiția (iii). Fie, de exemplu

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & t>0.\end{cases} \tag{15}$$

Aplicînd în mod formal definiția, putem scrie pentru această funcție

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad \mathrm{Re}p>0. \tag{16}$$

Integrala am calculat-o în ipoteza $p>0$; pentru p număr complex cu partea reală pozitivă, prin $\sqrt{p}$ înțelegem ramura care pentru p =pozitiv se reduce la radicalul aritmetic. Putem scrie deci

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\leftrightarrow\sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad \mathrm{Re}p>0. \tag{17}$$

Mai general, pentru $\nu>-1$ putem scrie

$$t^\nu\leftrightarrow\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \mathrm{Re}p>0, \tag{18}$$

unde bineînțeles Γ este funcția lui Euler, care se știe că admite următoarea reprezentare integrală

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}z>0. \tag{19}$$

Numitorul din formula (18) se calculează după regula

$$p^{\nu+1}=e^{(\nu+1)(\ln|p|+j\arg p)}=|p|^{\nu+1}e^{(\nu+1)j\arg p}, \quad \arg p\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{20}$$

Totuși, deși unele din proprietățile transformatei Laplace sînt adevărate într-un cadru mai general, noi vom presupune în cele ce urmează că lucrăm cu funcții original, deoarece acesta este cazul cel mai interesant, atît din punct de vedere teoretic, cît și practic.

Teorema 2.1. *Dacă*

$$f_1(t)\leftrightarrow F_1(p), \quad \mathrm{Re}p>a_1 \tag{21}$$
$$f_2(t)\leftrightarrow F_2(p), \quad \mathrm{Re}p>a_2,$$

atunci

$$f_1(t)+f_2(t)\leftrightarrow F_1(p)+F_2(p) \quad \mathrm{Re}p>\max\{a_1, a_2\}. \tag{22}$$

Demonstrație. Pentru $\mathrm{Re}p>max\{a_1, a_2\}$ putem scrie

$$\int_0^\infty e^{-pt}(f_1(t)+f_2(t))\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-pt}f_1(t)\mathrm{d}t+\int_0^\infty e^{-pt}f_2(t)\mathrm{d}t= \tag{23}$$
$$=F_1(p)+F_2(p),$$

care este echivalent cu (22). Conținutul acestei teoreme poate fi redat pe scurt astfel: „imaginea sumei este egală cu suma imaginilor".

Teorema 2.2. *Dacă*

$$f_i(t)\leftrightarrow F_i(p), \quad \mathrm{Re}p>a_i, \ i=\overline{1, n}, \tag{24}$$

iar c_i, $i=\overline{1,n}$ *sînt constante complexe, atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p), \quad \operatorname{Re} p > \max_i \{a_i\}. \tag{25}$$

Demonstrație. Pentru $\operatorname{Re} p > \max_i \{a_i\}$ putem scrie

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^\infty e^{-pt} f_i(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p), \tag{26}$$

care este echivalent cu (25), Q.E.D.

Teorema 2.3. *Dacă*

$$f(t) \leftrightarrow F(p) \quad , \operatorname{Re} p > a, \tag{27}$$

iar α *este un număr pozitiv, atunci*

$$f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad , \operatorname{Re} p > a\alpha \tag{28}$$

Demonstrație. Putem scrie

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(\alpha t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{p}{\alpha}\right)\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{29}$$

dacă facem substituția $\alpha t = \tau$ și luăm τ noua variabilă de integrare. Ultima integrală este convergentă dacă $\operatorname{Re}(p/\alpha) > a$, adică dacă $\operatorname{Re} p > a\alpha$. Demonstrația se încheie, dacă observăm că integrala din partea dreaptă a relației precedente este tocmai $F(p/\alpha)$.

Să facem o aplicație a proprietății (28), dar mai întîi să arătăm că

$$\cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+1}, \qquad \sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1} \quad , \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{30}$$

Să justificăm prima relație; vom scrie

$$\int_0^\infty e^{-pt}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-pt}(e^{jt}+e^{-jt})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(p-j)t}}{-(p-j)} + \frac{e^{-(p+j)t}}{-(p+j)}\right]_0^\infty = \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-j}+\frac{1}{p+j}\right] = \frac{p}{p^2+1}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

În mod cu totul asemănător se demonstrează și a doua relație (30). Ținînd acum seama de (28), va rezulta

$$\cos \alpha t \leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2+1} = \frac{p}{p^2+\alpha^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0 \tag{32}$$

și în mod corespunzător

$$\sin \alpha t \leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2+1} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \tag{33}$$

adevărate în fond pentru orice α real, inclusiv $\alpha = 0$

Teorema 2.4. *Dacă*

$$f(t) \leftrightarrow F(p), \quad \operatorname{Re} p > a, \tag{34}$$

iar λ *este un număr complex oarecare, atunci*

$$e^{-\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(p+\lambda), \qquad \operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re}\lambda. \tag{35}$$

Demonstrație. Mai întîi, observăm că $e^{-\lambda t}f(t)$ este de asemenea o funcție original, dacă f are această proprietate. Transformata sa Laplace va fi dată de integrala

$$\int_0^\infty e^{-pt}(e^{-\lambda t}f(t))\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t} f(t)\mathrm{d}t = F(p+\lambda), \tag{36}$$

care este convergentă dacă partea reală a lui $p+\lambda$ este mai mare decît a, adică dacă $\operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re}\lambda$. Demonstrația s-a încheiat.

Ca o aplicație, obținem formulele:

$$e^{-\lambda t}\cos \alpha t \leftrightarrow \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\alpha^2}, \qquad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re}\lambda \tag{37}$$

și corespunzător

$$e^{-\lambda t}\sin \alpha t \leftrightarrow \frac{\alpha}{(p+\lambda)^2+\alpha^2}, \quad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re}\lambda, \tag{38}$$

adevărate pentru orice λ complex și α real. În particular, luînd în (37) pe $\alpha = 0$, găsim

$$e^{-\lambda t} \leftrightarrow \frac{1}{p+\lambda}, \quad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re}\lambda, \tag{39}$$

sau încă

$$e^{\lambda t} \leftrightarrow \frac{1}{p-\lambda}, \quad \text{Re } p > \text{Re } \lambda, \tag{40}$$

oricare ar fi λ complex (sau real).

Teorema 2.5 (*Întîrzierea argumentului*). *Dacă*

$$f(t) \leftrightarrow F(p), \qquad \text{Re } p > a, \tag{41}$$

iar t_0 *este un număr pozitiv, atunci*

$$f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-t_0 p} F(p), \quad \text{Re } p > a. \tag{42}$$

Demonstrație. Prin $f(t-t_0)$ am notat funcția original care este nulă pentru $t<t_0$ și coincide cu $f(t-t_0)$ pentru $t>t_0$. Graficul acestei funcții se obține din graficul funcției $y=f(t)$ prin translare spre dreapta cu t_0 unități de lungime. Luînd transformata Laplace, vom avea:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\,dt = \int_{t_0}^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\,dt = e^{-t_0 p} \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau, \tag{43}$$

dacă facem substituția $t-t_0=\tau$ și luăm τ variabila de integrare. Ultima integrală obținută este însă convergentă pentru Re $p>a$ și are, evident, valoarea $F(p)$. Demonstrația este terminată.

Spre exemplu, putem scrie pentru $t_0>0$

$$\theta(t-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{p} e^{-t_0 p}, \quad \text{Re } p > 0, \tag{44}$$

unde $\theta=\theta(t)$ este funcția unitate. Tot astfel, pentru

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<t_0 \\ \sin(t-t_0), & t \geqslant t_0, \end{cases} \tag{45}$$

putem scrie, conform teoremei precedente

$$f(t) \leftrightarrow e^{-t_0 p} \frac{1}{p^2+1}, \quad \text{Re } p > 0. \tag{46}$$

Teorema 2.6 (*Derivarea originalului*). *Dacă* $f(t)$ *este continuă pentru* $t>0$

$$f(t) \leftrightarrow F(p), \qquad \text{Re } p > a \tag{47}$$

și $f'(t)$ *este de asemenea o funcție original, avînd exponentul de creștere* a_1, *atunci*

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0+), \qquad \text{Re } p > max\{a, a_1\}. \tag{48}$$

Demonstrație. Prin $f(0+)$ am notat limita la dreapta în punctul $t=0$ a funcției $f=f(t)$. Reamintim că orice funcție original are limite laterale finite în orice punct al axei reale. Pentru Re $p>max\{a, a_1\}$, putem scrie

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = [e^{-pt} f(t)]_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \tag{49}$$

dacă aplicăm integrarea prin părți. Deoarece

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-pt} f(t) = 0 \text{ și } \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} e^{-pt} f(t) = f(0+), \tag{50}$$

după cum se poate ușor constata, putem transcrie (49) în forma

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = pF(p) - f(0+) \tag{51}$$

și deci demonstrația s-a terminat. Putem scrie (48) și în forma

$$f'(t) \leftrightarrow p\left(F(p) - \frac{f(0+)}{p}\right), \quad \text{Re } p > max\{a, a_1\}. \tag{52}$$

Observație. Este interesant de remarcat că (48) nu este adevărată dacă funcția $f(t)$ ar avea puncte de discontinuitate în intervalul $(0, \infty)$. În adevăr, să presupunem că există un singur asemenea punct și anume $t_0>0$.

Scriind în acest caz

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f'(t)\,dt + \int_{t_0}^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt \tag{53}$$

și aplicînd acum integrarea prin părți, găsim

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0+) - \sigma_0 e^{-pt_0}, \tag{54}$$

unde $\sigma_0 = f(t_0+0) - f(t_0-0)$ este saltul funcției f în punctul t_0. Este clar cum ar arăta relația (48), dacă am presupune că f are mai multe puncte de discontinuitate.

Teorema 2.7. *Dacă funcția f și primele sale n derivate sînt funcții original, funcția și primele $n-1$ derivate sînt continui pentru $t>0$, atunci notînd cu $F(p)$ imaginea lui $f(t)$, are loc relația*

$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow p^nF(p)-p^{n-1}f(0+)-p^{n-2}f'(0+)-\ldots-\ldots-f^{(n-1)}(0+). \tag{55}$$

Demonstrație. Putem folosi inducția completă. Pentru $n=1$, formula (55) a fost demonstrată, ea reducîndu-se de fapt la (48). Presupunem că pentru un $k=$natural, avem

$$f^{(k)}(t)\leftrightarrow p^kF(p)-p^{k-1}f(0+)-\ldots-f^{(k-1)}(0+). \tag{56}$$

Aplicînd teorema precedentă, avem dreptul să scriem

$$f^{(k+1)}(t)\leftrightarrow p\ (\text{Imaginea lui } f^{(k)}(t))-f^{(k)}(0+). \tag{57}$$

Combinînd ultimele două relații, ajungem la concluzia că formula (56) este valabilă și pentru numărul următor, adică pentru $k+1$. În concluzie, în ipotezele date formula (55) este adevărată, Q.E.D.

Formula dedusă poate fi scrisă și în forma

$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow p^n\left(F(p)-\frac{f(0+)}{p}-\frac{f'(0+)}{p^2}-\ldots-\frac{f^{(n-1)}(0+)}{p^n}\right) \tag{58}$$

și se subînțelege că este valabilă pentru acele valori complexe p, care fac parte din domeniul de convergență al integralei $F(p)$. Rămîne valabilă și aici observația că dacă funcția sau una din primele $n-1$ derivate are discontinuități pe intervalul $(0, \infty)$, formula (55) nu mai este adevărată.

Teorema 2.8 (*Imaginea unei funcții periodice*). *Dacă funcția original $f=f(t)$ este periodică, cu perioada T, atunci*

$$f(t)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt, \qquad \operatorname{Re} p>0. \tag{59}$$

Demonstrație. Avem

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt+\int_T^\infty e^{-pt}f(t)\,dt, \tag{60}$$

pentru $\operatorname{Re} p>0$. Dacă în ultima integrală facem substituția $t=\tau+T$, unde τ este noua variabilă de integrare, putem scrie

$$\int_T^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=e^{-Tp}\int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau+T)\,d\tau=e^{-Tp}\int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau=$$

$$=e^{-Tp}F(p). \tag{61}$$

Se vede că am folosit și relația de periodicitate $f(\tau+T)=f(\tau)$ pentru orice $\tau\geqslant 0$. Din ultimele două relații, rezultă imediat că

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt, \qquad \operatorname{Re} p>0, \tag{62}$$

adică tocmai ceea ce trebuie demonstrat.

Spre exemplu, să găsim imaginea funcției

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ |\sin t|, & t\geqslant 0.\end{cases} \tag{63}$$

Se vede că în acest caz, perioada T este egală cu π; deci

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt}\sin t\,dt=\frac{1}{p^2+1}\operatorname{cth}\frac{\pi p}{2}, \quad \operatorname{Re} p>0. \tag{64}$$

Prin cth am notat funcția „cotangentă hiperbolică", adică raportul funcțiilor ch și sh.

Teorema 2.9 (*Integrarea originalului*). *Dacă*

$$f(t)\leftrightarrow F(p), \qquad \operatorname{Re} p>a, \tag{65}$$

atunci are loc relația

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau\leftrightarrow\frac{1}{p}F(p), \qquad \operatorname{Re} p>max\,\{a, 0\} \tag{66}$$

și mai general

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)\,dt_n\leftrightarrow\frac{1}{p^n}F(p), \quad \operatorname{Re} p>max\,\{a, 0\}. \tag{67}$$

Demonstrație. Mai întîi se poate verifica ușor că prin integrarea unei funcții original se obține tot o funcție original. Dacă a este exponentul de creștere a funcției $f=f(t)$, pentru $\operatorname{Re} p>b=\max\{a, 0\}$ constatăm că integrala generalizată

$$\iint_D e^{-pt}f(\tau)\,dt\,d\tau, \tag{68}$$

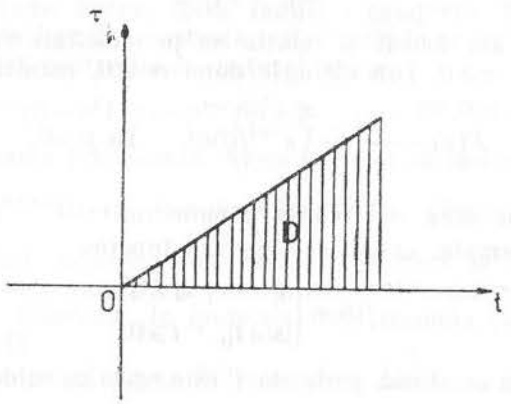

Fig. 2.1.

calculată pe domeniul nemărginit $D=\{(t, \tau);\ 0\leqslant\tau\leqslant t<\infty\}$, este absolut convergentă, deoarece

$$|e^{-pt}f(\tau)|\leqslant Me^{-(b+\varepsilon)(t-\tau)},\quad \forall(t, \tau)\in D, \tag{69}$$

unde M este o constantă pozitivă, iar $\varepsilon>0$ a fost astfel ales încît $\operatorname{Re} p=b+\varepsilon$.

Deoarece $b+\varepsilon>0$, din (69) decurge atunci convergența absolută a integralei (68). Putem scrie

$$\iint_D e^{-pt}f(\tau)dt\,d\tau=\int_0^\infty e^{-pt}dt\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)=\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\left(\int_\tau^\infty e^{-pt}dt\right), \tag{70}$$

dacă folosim cele două moduri de calculare pentru o integrală dublă. Observăm că termenul de la mijloc al relației precedente este tocmai imaginea funcției $\int_0^t f(\tau)d\tau$, pe care urmărim să o

determinăm. În ceea ce privește ultimul termen al relației precedente, putem scrie întîi că

$$\int_\tau^\infty e^{-pt}dt=\frac{e^{-p\tau}}{p},\quad \operatorname{Re} p>b \tag{71}$$

și deci

$$\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\left(\int_\tau^\infty e^{-pt}dt\right)=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau=\frac{1}{p}F(p). \tag{72}$$

În concluzie, am găsit că relația (66) este adevărată, adică integrarea originalului are ca efect împărțirea imaginii cu p. Aplicînd încă o dată relația (66), obținem că

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\leftrightarrow\frac{1}{p^2}F(p),\quad \operatorname{Re} p>\max\{a, 0\}, \tag{73}$$

iar dacă continuăm, ajungem la cazul general (67). În rezumat, putem spune că integrarea repetată de n ori a originalului are ca efect împărțirea imaginii cu p^n.

Teorema 2.10 (*Imaginea produsului de convoluție a două originale*). *Dacă*

$$f_i(t)\leftrightarrow F_i(p),\ \operatorname{Re} p>a_i,\ i=1, 2, \tag{74}$$

atunci rezultă

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\leftrightarrow F_1(p)F_2(p),\quad \operatorname{Re} p>\max\{a_1, a_2\}. \tag{75}$$

Demonstrație. Am numit produsul de convoluție a două originale f_1 și f_2, notat f_1*f_2, funcția definită prin relația

$$(f_1*f_2)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau,\ t=\text{real}. \tag{76}$$

Se constată imediat că

$$(f_1*f_2)(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau, & t>0.\end{cases} \tag{77}$$

Apoi se vede că produsul de convoluție este comutativ. Să arătăm acum că $f_1 * f_2$ este de asemenea o funcție original. Dacă notăm cu a cel mai mare dintre exponenții de creștere a_1 și a_2, avem în mod evident

$$|f_1(t)| \leqslant M_1 e^{(a+\varepsilon)t}, \quad |f_2(t)| \leqslant M_2 e^{(a+\varepsilon)t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{78}$$

unde $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, iar M_1 și M_2 sînt niște constante. Folosind (77), vom putea scrie majorarea

$$|(f_1 * f_2)(t)| \leqslant M_1 M_2 t e^{(a+\varepsilon)t} \leqslant M(\varepsilon) e^{(a+2\varepsilon)t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{79}$$

unde $M(\varepsilon)$ este o constantă pozitivă. De aici se vede, în primul rînd că $f_1 * f_2$ este o funcție original, avînd creșterea de tip exponențial, iar în al doilea rînd că imaginea ei este definită în semiplanul $\operatorname{Re} p > a$.

Mai departe, deoarece integrala generalizată

$$\iint_D e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,dt\,d\tau, \quad \operatorname{Re} p > a \tag{80}$$

este absolut convergentă, putem scrie

$$\int_0^\infty e^{-pt}dt\left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau\right) = \int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau\left(\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\,dt\right). \tag{81}$$

D este domeniul haşurat din figura 2.1. Observăm că primul termen al relației (81) este chiar transformata Laplace a produsului de convoluție $f_1 * f_2$. În ce privește cel de al doilea termen din (81), avem mai întîi

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2\,(t-\tau)\,dt = e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-pu} f_2(u)\,du = e^{-p\tau} F_2(p), \tag{82}$$

dacă punem $t-\tau = u$ și luăm u noua variabilă de integrare. Termenul al doilea din (81) este deci

$$F_2(p)\int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\,d\tau = F_1(p)F_2(p), \tag{83}$$

și deci (75) este adevărată. În cuvinte, aceasta se traduce prin aceea că imaginea produsului de convoluție a două originale este produsul aritmetic al imaginilor factorilor. O formulare mai puțin

precisă, dar mai scurtă, este aceasta: „imaginea produsului este egală cu produsul imaginilor".

Produsul de convoluție are și proprietatea de asociativitate, adică

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3, \tag{84}$$

oricare ar fi cele trei funcții original. Putem extinde teorema precedentă la un produs de n factori, ceea ce vrea să însemne că are loc relația

$$f_1 * f_2 * \ldots * f_n \leftrightarrow F_1(p)F_2(p)\ldots F_n(p), \qquad \operatorname{Re} p > a, \tag{85}$$

unde $a = \max\limits_i \{a_i\}$, a_i fiind exponentul de creștere al funcției f_i, $i = \overline{1, n}$.

Ca o remarcă generală, putem spune că toate proprietățile transformatei Laplace puse aici în evidență sînt elementare, fiind consecințe directe ale definiției (6). În continuare, vom demonstra alte teoreme, care stabilesc proprietăți esențiale ale transformării integrale (6).

Teorema 2.11. *Dacă*

$$f(t) \leftrightarrow F(p), \quad \operatorname{Re} p > a, \tag{86}$$

atunci rezultă

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} F(p) = 0 \tag{87}$$

Demonstrație. Pentru fiecare $\varepsilon > 0$, găsim $M = M(\varepsilon)$ astfel încît

$$|f(t)| \leqslant M\, e^{(a+\varepsilon)t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{88}$$

dacă a este exponentul de creștere al funcției f. Dacă scriem $p = x + jy$ și presupunem că $x - (a+\varepsilon) = \beta > 0$, atunci

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt\right| \leqslant M\int_0^\infty e^{-\beta t}dt = \frac{M}{x-(a+\varepsilon)}. \tag{89}$$

Făcînd aici pe x să tindă la $+\infty$, obținem (87), Q.E.D.

Observație. Dacă punctul $p = \infty$ este singularitate aparentă a funcției $F = F(p)$, care se presupune că este olomorfă în o veci-

nătate a punctului de la infinit, relația (87) se înlocuiește cu una mai tare și anume

$$\lim_{p\to\infty} F(p)=0. \tag{90}$$

Cel mai simplu exemplu care ilustrează această afirmație îl dă funcția $F(p)=1/p$ care este, după cum am văzut, imaginea funcției unitate $\theta=\theta(t)$, dată prin relația (10).

Teorema 2.12. *Dacă funcția original $f=f(t)$ are exponentul de creștere a, atunci imaginea sa $F=F(p)$ este olomorfă în semiplanul* Re $p>a$.

Demonstrație. Pentru Re $p>a$, putem scrie

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(p), \tag{91}$$

unde evident că am folosit notația

$$u_n(p)=\int_n^{n+1} e^{-pt}f(t)\,dt, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{92}$$

Avînd în vedere că pe fiecare interval finit $f=f(t)$ are cel mult un număr finit de discontinuități de speța întîi, rezultă că funcțiile $u_n(p)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ sînt olomorfe în variabila p și are loc

$$u_n'(p)=\int_n^{n+1} e^{-pt}(-t)f(t)\,dt, \qquad p=\text{complex}, \tag{93}$$

relație care se obține ca și în cazul clasic, prin derivarea în raport cu parametrul sub semnul integralei. Din (91) rezultă că $F(p)$ este suma unei serii de funcții olomorfe. Să arătăm acum că această serie converge uniform în orice semiplan de forma Re $p\geqslant a_1>a$. În adevăr, pentru Re $p\geqslant a_1>a$ putem scrie

$$|u_{n+1}(p)+u_{n+2}(p)+\ldots+u_{n+m}(p)|=\left|\int_{n+1}^{n+m+1} e^{-pt}f(t)\,dt\right|\leqslant\int_n^\infty |e^{-pt}f(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant M\int_n^\infty e^{-a_1t}e^{(a_1-\alpha)t}\,dt=\frac{M}{\alpha}e^{-n\alpha}, \tag{94}$$

unde $\alpha>0$ este suficient de mic, încît $a_1-\alpha>a$. Din (94) se vede clar că pentru orice $\varepsilon>0$ există un $N=N(\varepsilon)>0$ astfel încît

$$|u_{n+1}(p)+u_{n+2}(p)+\ldots+u_{n+m}(p)|<\varepsilon, \tag{95}$$

de îndată ce $n\geqslant N(\varepsilon)$ și $m=$arbitrar, oricare ar fi p din semiplanul Re $p\geqslant a_1$. Aceasta înseamnă că seria (91) converge uniform în orice semiplan de forma indicată, deci $F(p)$ este olomorfă în Re $p>a$. Mai mult chiar, în (91) este permisă derivarea termen cu termen, adică

$$F'(p)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-pt}(-t)f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-pt}(-t)f(t)\,dt, \tag{96}$$

pentru Re $p>a$. Deci am demonstrat că

$$-tf(t)\leftrightarrow F'(p), \qquad \text{Re } p>a. \tag{97}$$

Aplicarea repetată a relației precedente ne arată că pentru orice n natural, avem

$$(-1)^n t^n f(t)\leftrightarrow F^{(n)}(p), \qquad \text{Re } p>a. \tag{98}$$

Altfel spus, derivarea imaginii are ca efect multiplicarea originalului cu $-t$ și în consecință, derivarea de n ori a imaginii are ca efect înmulțirea originalului cu factorul $(-1)^n t^n$.

Ca o aplicație, plecînd de la

$$e^{\lambda t}\leftrightarrow\frac{1}{p-\lambda}, \qquad \text{Re } p>\text{Re }\lambda, \tag{99}$$

deducem că

$$t^n e^{\lambda t}\leftrightarrow\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, \qquad \text{Re } p>\text{Re }\lambda,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{100}$$

Această formulă, deși este foarte simplă, permite calcularea imaginii multor funcții elementare și invers, permite de multe ori citirea originalului cînd se cunoaște transformata. În particular, luînd $\lambda=0$ în (100) găsim

$$t^n\leftrightarrow\frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \text{Re } p>0, \tag{101}$$

adică aceeași relație care se obține și din (18) făcînd $\nu=n$ și ținînd seamă că $\Gamma(n+1)=n!$

Teorema 2.13 (*Integrarea imaginii*). *Dacă $f=f(t)$ are imaginea $F=F(p)$, în semiplanul* $\operatorname{Re} p>a$ *şi $f(t)/t$ este de asemenea o funcţie original, atunci*

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty F(q)\,dq, \qquad \operatorname{Re} p>a. \tag{102}$$

Demonstraţie. Considerăm imaginea funcţiei $f(t)/t$, anume

$$I(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}\,dt, \tag{103}$$

care este olomorfă pentru $\operatorname{Re} p>a$. Mai mult chiar, se poate deriva în raport cu p sub integrală, deci

$$I'(p)=-\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=-F(p), \qquad \operatorname{Re} p>a. \tag{104}$$

Fixînd p în semiplanul $\operatorname{Re} p>a$ şi integrînd egalitatea precedentă pe paralela la axa reală care uneşte p cu punctul de la infinit, vom obţine

$$I(\infty)-I(p)=-\int_p^\infty F(q)\,dq, \tag{105}$$

de unde, avînd în vedere că $I(\infty)=0$, rezultă

$$I(p)=\int_p^\infty F(q)\,dq, \qquad \operatorname{Re} p>a, \tag{106}$$

care arată că (102) este adevărată, Q.E.D.

Totodată, a rezultat şi convergenţa integralei $\int_p^\infty F(q)\,dq$ pe orice drum care uneşte p cu ∞, cu condiţia ca pe acest drum $\operatorname{Re} q\to+\infty$ cînd q se depărtează spre infinit.

Exemplu. Să găsim imaginea funcţiei

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{\sin t}{t}, & t>0.\end{cases} \tag{107}$$

Rezolvare. Ştiind că imaginea funcţiei $f(t)=\sin t$ este $1/p^2+1$, va rezulta că

$$\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty \frac{dq}{q^2+1}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} p, \quad \operatorname{Re} p>0, \tag{108}$$

unde $\operatorname{arc\,tg} p$ este ramura care pentru $p=x>0$ se reduce la determinarea principală a funcţiei $\operatorname{arc\,tg} x$. Folosind teorema de integrare a originalului, obţinem din (108) altă relaţie şi anume

$$\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} p\right), \qquad \operatorname{Re} p>0. \tag{109}$$

Exerciţiu. Să se afle imaginea funcţiei

$$f(t)=\frac{\cos at-\cos bt}{t}, \qquad t>0, \tag{110}$$

unde a şi b sînt două constante reale.

Rezolvare. Deoarece din formula (32) rezultă

$$\cos at-\cos bt \leftrightarrow \frac{p}{p^2+a^2}-\frac{p}{p^2+b^2}, \qquad \operatorname{Re} p>0, \tag{111}$$

aplicînd teorema precedentă, găsim

$$\frac{\cos at-\cos bt}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty\left(\frac{p}{p^2+a^2}-\frac{p}{p^2+b^2}\right)dp=\ln\frac{\sqrt{p^2+b^2}}{\sqrt{p^2+a^2}}, \ \operatorname{Re} p>0. \tag{112}$$

Vom prezenta acum o teoremă care ne arată cum se exprimă funcţia original $f=f(t)$ cu ajutorul imaginii sale $F=F(p)$. După cum se va vedea, în condiţii dintre cele mai generale, imaginea determină în mod unic originalul, putînd spune că avem o corespondenţă biunivocă între mulţimea originalelor şi mulţimea imaginilor. Dar, pentru ca această afirmaţie să fie exactă, se impune convenţia să nu considerăm ca distincte două originale care pe fiecare interval al axei reale diferă cel mult într-un număr finit de puncte. Totodată, ne vom limita numai la funcţiile $f=f(t)$ care sînt netede pe porţiuni — a se vedea în acest scop Definiţia 1.10.

Teorema 2.14 (*Mellin-Fourier*). *Dacă* $f=f(t)$ *este o funcție original netedă pe porțiuni și*

$$f(t)\leftrightarrow F(p), \qquad \text{Re } p>a, \tag{113}$$

atunci are loc formula de inversare

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \quad x>a, \tag{114}$$

în toate punctele de continuitate ale funcției $f=f(t)$.

Demonstrație. Funcția $f=f(t)$ fiind cunoscută și avînd exponentul de creștere egal cu a, luăm un număr real $x>a$ și considerăm funcția ajutătoare

$$\varphi(t)=e^{-xt}f(t), \qquad t\in(-\infty,\infty), \tag{115}$$

care este de asemenea netedă pe porțiuni. Avem desigur $\varphi(t)=0$ pentru $t<0$ și în plus

$$|\varphi(t)|\leqslant M\,e^{-\alpha t}, \qquad t\geqslant 0, \tag{116}$$

unde $\alpha>0$ este o anumită constantă. După cum vom arăta la transformata Fourier, este adevărată formula

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)e^{j\xi(t-\eta)}\,d\eta, \tag{117}$$

în toate punctele t de continuitate ale funcției $\varphi=\varphi(t)$. În punctele de discontinuitate, care însă sînt obligator de speța întîi, valoarea integralei (117) este egală $(1/2)(\varphi(t+0)+\varphi(t-0))$. Din (117) și (115) rezultă

$$e^{-xt}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{0}^{\infty} e^{-(x+j\xi)\eta}f(\eta)e^{j\xi t}d\eta, \tag{118}$$

dacă avem în vedere că $f(\eta)=0$ pentru $\eta<0$. Factorul $exp\,(j\xi t)$ nu depinde de η, în timp ce integrala

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(x+j\xi)\eta}f(\eta)d\eta \tag{119}$$

este tocmai $F(x+j\xi)$. Revenind la (118), putem scrie

$$e^{-xt}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\xi t}F(x+j\xi)\,d\xi, \tag{120}$$

sau încă

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+j\xi)t}F(x+j\xi)\,d\xi, \tag{121}$$

în toate punctele de continuitate ale lui $f=f(t)$. În punctele de discontinuitate, valoarea integralei precedente este semisuma limitelor laterale $(f(t+0)+f(t-0))/2$. Ca o simplă observație, putem menționa că valoarea integralei (121) este nulă pentru toate valorile $t<0$.

Dacă notăm $x+j\xi=p$, vedem că atunci cînd ξ ia valori de la $-\infty$ la $+\infty$, punctul complex p descrie paralela la axa imaginară dusă prin punctul de abscisă x. Forțînd puțin exprimarea, putem spune că punctul p descrie dreapta care unește punctele $x-j\infty$ și $x+j\infty$. Deoarece $d\xi=dp/j$, putem transcrie (121) în forma

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \quad x>a, \tag{122}$$

menținînd aceleași observații asupra punctelor de continuitate, respectiv discontinuitate ale funcției $f=f(t)$.

Se vede că integrala expresiei $e^{pt}F(p)$ are aceeași valoare (pentru t fixat) pe orice paralelă la axa imaginară, situată în semiplanul $\text{Re } p>a$.

Observație importantă. Deoarece formula de inversare a fost dedusă cu ajutorul transformatei Fourier, după cum vom vedea la momentul potrivit, integrala în (122) trebuie înțeleasă în sensul de „valoare principală". Aceasta înseamnă că integrala se calculează potrivit regulei

$$\int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{pt}F(p)\,dp=\lim_{A\to\infty}\int_{x-jA}^{x+jA} e^{pt}F(p)\,dp. \tag{123}$$

În exerciții însă, aceasta nu deranjează cu nimic, ba dimpotrivă simplifică lucrurile.

Exercițiu. Să se verifice formula de inversare (114) în cazul concret al funcției

$$f(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ \sin t\,, & t\geqslant 0.\end{cases} \tag{124}$$

O altă problemă importantă a calculului operațional este aceea de a răspunde la întrebarea în ce condiții o funcție $F=F(p)$ olomorfă într-un semiplan de forma $\operatorname{Re} p>a$ este imaginea unei anumite funcții original $f=f(t)$. În cazul că o astfel de funcție există, se pune desigur și problema aflării ei. Răspunsul la această întrebare este dat de

Teorema 2.15. *Funcția de variabilă complexă $F=F(p)$ satisface condițiile*

a) *$F(p)$ este olomorfă în semiplanul* $\operatorname{Re} p>a$,

b) *$F(p)$ tinde la zero cînd $|p|\to\infty$, uniform în raport cu* $\arg p$,

c) *pentru orice $x>a$, are loc inegalitatea*

$$\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}|F(p)|\mathrm{d}y<M, \tag{125}$$

unde M este o constantă pozitivă, depinzînd în general de x.

Atunci, în domeniul $\operatorname{Re} p>a$, *funcția $F=F(p)$ este imaginea funcției de variabilă reală $f=f(t)$, definită prin*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}e^{pt}F(p)\mathrm{d}p, \quad x>a. \tag{126}$$

Demonstrație. Avem de justificat mai multe afirmații și anume în primul rînd faptul că integrala (126) converge, în al doilea rînd faptul că funcția $f=f(t)$ definită de (126) este o funcție original și în sfîrșit faptul că imaginea funcției $f=f(t)$ este în adevăr funcția dată $F=F(p)$.

Mai întîi, observăm că

$$\left|\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}e^{pt}F(p)\mathrm{d}p\right|\leqslant\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}|e^{pt}F(p)|\,\mathrm{d}y=e^{xt}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}|F(p)|\mathrm{d}y\leqslant Me^{xt}, \tag{127}$$

pentru orice t real și orice $x>a$. De aici rezultă că pentru $\operatorname{Re} p>a$, integrala (126) este absolut convergentă pentru orice valoare fixată a lui t.

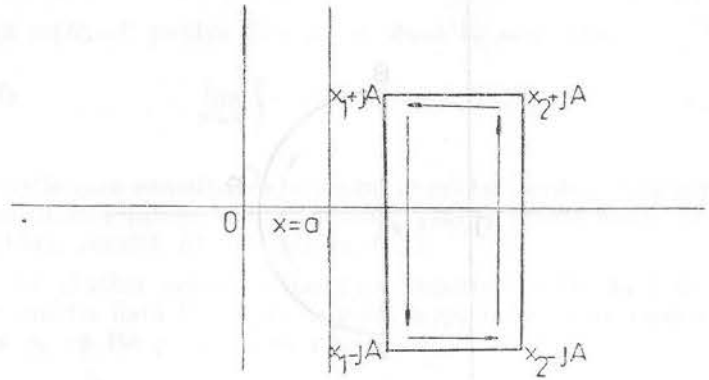

Fig. 2.2

Să arătăm acum că pentru orice t=fixat, integrala (126) nu depinde de x, deci definiția funcției $f=f(t)$ este corectă. În adevăr, dacă x_1 și x_2 sînt două numere mai mari decît a, considerăm conturul format din laturile dreptunghiului cu vîrfurile în punctele x_1-jA, x_2-jA, x_2+jA, și x_1+jA, unde A este un număr pozitiv oarecare.

Deoarece funcția $e^{pt}F(p)$ este olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p>a$, integrala ei pe acest contur este zero. Scriind acest lucru, făcînd pe $A\to+\infty$ și avînd în vedere că integralele pe laturile orizontale tind la zero, conform ipotezei b), rezultă că

$$\int_{x_1-j\infty}^{x_1+j\infty}e^{pt}F(p)\mathrm{d}p=\int_{x_2-j\infty}^{x_2+j\infty}e^{pt}F(p)\mathrm{d}p, \tag{128}$$

care, în baza alegerii arbitrare a lui x_1 și x_2, ne arată că integrala (126) nu depinde de x.

Din (127) rezultă majorarea

$$|f(t)|\leqslant\frac{M}{2\pi}e^{xt}, \quad t\geqslant 0, \tag{129}$$

oricare ar fi $x>a$, ceea ce ne spune că exponentul de creştere al funcţiei $f=f(t)$ este cel mult egal cu a, deci transformata sa Laplace este definită pentru Re $p>a$.

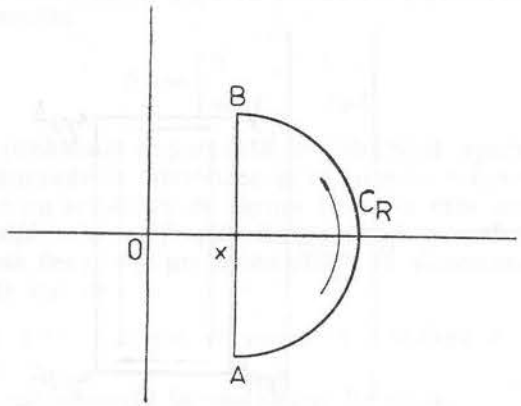

Fig. 2.3

Să arătăm acum că pentru $t<0$, avem $f(t)=0$, condiţie pe care trebuie să o satisfacă orice funcţie original. Considerăm conturul format din segmentul paralel cu axa imaginară, care uneşte punctele $x-jR$ şi $x+jR$, la care adăugăm semicercul $|p-x|=R$ situat la dreapta acestui segment.
Deoarece funcţia $e^{pt}F(p)$ este olomorfă în semiplanul Re $p>a$, integrala ei pe acest contur parcurs în sens direct este nulă, de unde vom găsi

$$\int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{pt}F(p)\mathrm{d}p=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{pt}F(p)\mathrm{d}p, \tag{130}$$

unde $t<0$ este o valoare fixată. Pentru $p\in C_R$ scriem $p=x+R(\cos\theta+j\sin\theta)$ cu $\theta\in[-\pi/2,\ \pi/2]$, iar dacă facem şi notaţia

$$\sup_{p\in C_R}|F(p)|=m(R), \tag{131}$$

vom găsi că

$$\left|\int_{C_R} e^{pt}F(p)\mathrm{d}p\right|\leqslant 2Rm(R)e^{xt}\int_0^{\pi/2} e^{Rt\sin\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{132}$$

Un calcul elementar, bazat pe observaţia că

$$Rt\sin\theta\leqslant\frac{2Rt}{\pi}\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{133}$$

şi că $m(R)\to 0$ pentru $R\to\infty$, ne duce la concluzia

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{pt}F(p)\mathrm{d}p=0,\quad (t<0), \tag{134}$$

afirmaţie care constituie conţinutul lemei lui Jordan, larg utilizată la calcularea integralelor complexe. Ţinînd seama acum de (130) şi (134), rezultă $f(t)=0$ pentru $t<0$.

Să arătăm acum că imaginea funcţiei $f=f(t)$ dată de (126) este funcţia dată $F=F(p)$. În acest scop, să luăm un număr complex p_0 cu Re $p_0>$a şi să scriem că

$$\int_0^\infty e^{-p_0t}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi j}\int_0^\infty e^{-p_0t}\,\mathrm{d}t\int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{pt}F(p)\mathrm{d}p, \tag{135}$$

unde x este un număr real $>a$, iar $p=x+jy$. Dacă alegem pe $x<x_0=$Re p_0, din cauza inegalităţii

$$|e^{-(p_0-p)t}F(p)|\leqslant e^{-(x_0-x)t}|F(p)| \tag{136}$$

şi a condiţiei (125) din enunţul teoremei, putem schimba ordinea de integrare în (135), obţinînd

$$\int_0^\infty e^{-p_0t}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}F(p)\mathrm{d}p\int_0^\infty e^{-(p_0-p)t}\mathrm{d}t= \tag{137}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}F(p)\,\frac{\mathrm{d}p}{p_0-p}.$$

Pentru calcularea ultimei integrale, ne folosim de conturul constînd din segmentul ce uneşte $x-jR$ cu $x+jR$ şi semicercul drept C_R

al cercului de ecuație $|p-x|=R>0$ (fig. 2.3). Vom avea, integrînd în sens direct

$$(138)\quad \int_{C_R} F(p)\,\frac{dp}{p_0-p} + \int_{x+jR}^{x-jR} F(p)\,\frac{dp}{p_0-p} = 2\pi j \operatorname{Rez}\left[\frac{F(p)}{p_0-p};\ p=p_0\right],$$

deoarece de data aceasta funcția $F(p)/(p_0-p)$ are un pol simplu în $p=p_0$, care se află în interiorul conturului. Deoarece

$$(139)\quad \operatorname{Rez}\left[\frac{F(p)}{p_0-p},\ p=p_0\right] = \lim_{p\to p_0}(p-p_0)\,\frac{F(p)}{p_0-p} = -F(p_0)$$

și

$$(140)\quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(p)\,\frac{dp}{p_0-p} = 0,$$

făcînd $R\to\infty$ în (138) găsim

$$(141)\quad \frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(p)\,\frac{dp}{p_0-p} = F(p_0).$$

Din (137) rezultă atunci

$$(142)\quad \int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\,dt = F(p_0),\quad \operatorname{Re} p_0 > a,$$

ceea ce înseamnă că imaginea lui $f(t)$ este $F(p)$, întrucît p_0 a fost luat arbitrar în semiplanul $\operatorname{Re} p>a$. Demonstrația este terminată.

Exemplu. Dacă se consideră funcția

$$(143)\quad F(p) = \frac{p^2-p+2}{(p^2+1)(p^2+4)},$$

se constată că ea este olomorfă pentru $\operatorname{Re} p>0$, deoarece polii ei sînt situați pe axa imaginară. Polii sînt $p_1=j$, $p_2=-j$, $p_3=2j$ și $p_4=-2j$. De asemenea se vede că ea satisface toate condițiile

teoremei precedente. Dacă se calculează originalul cu formula (126) se ajunge în final la concluzia că

$$(144)\quad f(t) = \frac{1}{3}(\cos 2t + \sin 2t - \cos t + \sin t),\quad t\geqslant 0.$$

Nu vom insista asupra detaliilor de calcul, deoarece acest exemplu este un caz particular al unei situații mai generale, cuprinse în teorema care urmează.

Teorema 2.16. *Dacă $F=F(p)$ este o fracție rațională (raportul a două polinoame) pentru care*

$$(145)\quad \lim_{p\to\infty} F(p) = 0,$$

atunci ea este imaginea funcției original

$$(146)\quad f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez}[e^{pt}F(p);\ p=p_k],\quad t\geqslant 0,$$

unde suma este extinsă la toți polii p_k ai fracției $F=F(p)$.

Demonstrație. Din cauza condiției (145), este clar că gradul numărătorului este mai mic cel puțin cu o unitate decît gradul numitorului. Dacă diferența gradelor numitorului și numărătorului este cel puțin egală cu 2, sînt îndeplinite toate condițiile teoremei precedente, și putem calcula originalul cu formula (126). În cazul cînd diferența dintre aceste grade este egală cu 1, nu mai putem face apel direct la teorema pe care am numit-o, deoarece nu mai este satisfăcută condiția (125). Totuși, schimbarea ordinii de integrare în formula (135) este posibilă în condiții mai generale decît cele garantate de restricția (125). Or, în cazul de față, această intervertire a ordinii de integrare este permisă, după cum se vede din (137), în rest rămînînd valabilă toată demonstrația. În concluzie, în condițiile teoremei de care ne ocupăm, avem voie să folosim (126) pentru găsirea originalului. Pentru $t<0$, avem $f(t)=0$, iar pentru $t>0$ avem

$$(147)\quad f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{pt}F(p)\,dp,\quad x>a,$$

unde a este un număr real cu proprietatea că $F(p)$ este olomorfă pentru $\operatorname{Re} p>a$. Este evident că $a=\max_k\{\operatorname{Re} p_k\}$, unde p_k sînt polii fracției $F(p)$.

Alegînd conturul format din segmentul care unește punctele $x-jR$ și $x+jR$, la care adăugăm semicercul stîng C_R al cercului de ecuație $|p-x|=R$

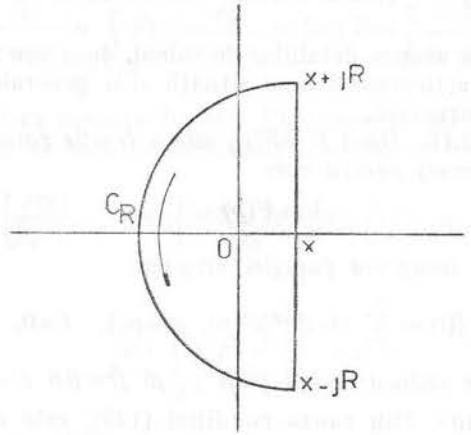

Fig. 2.4

vom putea scrie

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{x-jR}^{x+jR} e^{pt}F(p)\,dp+\frac{1}{2\pi j}\int_{C_R} e^{pt}F(p)\,dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Rez}[e^{pt}F(p);\ p=p_k]. \tag{148}$$

Folosind un calcul asemănător celui care ne-a dus la concluzia (134), vom putea arăta și în acest caz că

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{pt}F(p)\,dp=0. \tag{149}$$

Făcînd pe $R\to\infty$ în relația (148) și ținînd seama de (147) și (149) vom obține formula (146), Q.E.D.

Observația 1. Formula (146) este deosebit de utilă în cazul cînd fracția rațională

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}, \tag{150}$$

are toți polii simpli. În această situație avem

$$\operatorname{Rez}[e^{pt}F(p);\ p_k]=\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{p_kt},\quad k=\overline{1,n} \tag{151}$$

și deci originalul $f(t)$ este dat de formula

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{p_kt},\quad t\geqslant 0. \tag{152}$$

Observația 2. Pentru cazul cînd $F=F(p)$ este o fracție rațională, există și alt procedeu simplu de aflare a originalului și anume descompunerea lui $F(p)$ în fracții simple complexe și citirea contraimaginii cu ajutorul formulei (100). De exemplu, pentru fracția

$$F(p)=\frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2},\quad (a>0), \tag{153}$$

avem o descompunere în fracții simple de forma

$$F(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{(p+aj)^2}+\frac{C}{p+aj}+\frac{D}{(p-aj)^2}+\frac{E}{p-aj}, \tag{154}$$

unde coeficienții au valorile

$$A=1,\ B=\frac{-aj}{4},\quad C=-\frac{1}{2},\quad D=\frac{aj}{4},\quad E=-\frac{1}{2}. \tag{155}$$

Prin urmare, originalul ei este funcția

$$f(t)=1-\frac{1}{2}(e^{ajt}+e^{-ajt})-\frac{at}{2}\,\frac{1}{2j}(e^{ajt}-e^{-ajt}),\quad t\geqslant 0 \tag{156}$$

sau într-o formă mai convenabilă

$$f(t)=1-\cos at-\frac{at}{2}\sin at,\quad t\geqslant 0. \tag{157}$$

Cazul cînd $F=F(p)$ este diferită de o fracție rațională este mai complicat. Totuși, ideea descompunerii lui $F(p)$ în expresii mai simple se dovedește mai utilă decît recurgerea directă la formula (126). Anume, să presupunem că $F=F(p)$ olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p>a$ și satisfăcînd condiția necesară pe care o îndeplinește orice funcție imagine

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} F(p)=0 \tag{158}$$

este de fapt olomorfă într-o întreagă vecinătate a punctului de la infinit şi că $p=\infty$ este punct ordinar (singularitate aparentă) al ei; atunci are loc dezvoltarea Laurent

$$F(p)=c_0+\frac{c_1}{p}+\frac{c_2}{p^2}+\ldots+\frac{c_n}{p^n}+\ldots,\quad |p|>R, \tag{159}$$

valabilă în exteriorul cercului de rază R cu centrul în origine. Datorită condiţiei (158), rezultă cu necesitate $c_0=0$, deci

$$F(p)=\frac{c_1}{p}+\frac{c_2}{p^2}+\ldots+\frac{c_n}{p^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n},\quad |p|>R, \tag{160}$$

unde, după cum se ştie, coeficienţii c_n se calculează cu formula

$$c_n=\frac{1}{2\pi j}\int_{|p|=R_1}F(p)p^{n-1}dp,\quad n=1,\ 2,\ ,\ . \tag{161}$$

R_1 fiind orice număr pozitiv mai mare decît R, valoarea integralei (161) nedepinzînd de raza cercului pe care se face integrarea.

Deoarece pentru $|p|>R$ are loc majorarea de forma

$$|F(p)|\leqslant M/R, \tag{162}$$

unde M este un număr pozitiv fixat, obţinem din (161) inegalităţile

$$|c_n|\leqslant MR^{n-1},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{163}$$

Teorema 2.17. *Dacă funcţia de variabilă complexă $F=F(p)$ satisface condiţia* (160), *atunci ea este imaginea funcţiei de variabilă reală*

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0.\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{n+1}\dfrac{t^n}{n!}, & t\geqslant 0\end{cases} \tag{164}$$

Demonstraţie. Mai întîi deducem că pentru $t\geqslant 0$ are loc majorarea

$$|f(t)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|c_{n+1}|\frac{t^n}{n!}\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Rt)^n}{n!}=M\,e^{Rt}, \tag{165}$$

care ne arată că seria care defineşte funcţia $f=f(t)$ este convergentă pe semiaxa pozitivă şi în plus, această funcţie are o creştere

de tip exponenţial. Ea poate avea cel mult o discontinuitate de speţa întîi în origine ($t=0$), dacă $c_1\neq 0$. Prin urmare, din modul cum a fost definită, funcţia $f=f(t)$ satisface toate proprietăţile unei funcţii original. Transformata sa Laplace este definită cel puţin în semiplanul $\operatorname{Re} p>R$.

Punctul central al demonstraţiei constă în stabilirea relaţiei $f(t)\leftrightarrow F(p)$ pentru $\operatorname{Re} p>R$. În acest scop să observăm că din (160) rezultă că pentru p fixat ($|p|>R$) şi $\varepsilon>0$ dat apriori, avem

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|c_n|}{|p|^n}<\varepsilon,\quad \forall N\geqslant N(\varepsilon), \tag{166}$$

condiţie care exprimă faptul că restul seriei absolut convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(|c_n|/|p|^n)$ poate fi făcut oricît de mic, de îndată ce rangul N este suficient de mare. Să presupunem pentru moment că p este real, $p>R$ şi să observăm că seria

$$e^{-pt}f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{n!}e^{-pt}t^n, \tag{167}$$

converge uniform pe orice interval finit $0\leqslant t\leqslant A$, deoarece este obţinută prin înmulţirea cu un factor mărginit a unei serii de puteri, a cărei rază de convergenţă este $+\infty$, după cum rezultă din (165). În consecinţă, în (167) este permisă integrarea termen cu termen pe orice interval finit $[0,\ A]$, adică

$$\int_0^A e^{-pt}f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{n!}\int_0^A e^{-pt}t^n dt. \tag{168}$$

Referindu-ne la relaţia (166), putem spune că

$$\left|\int_0^A e^{-pt}f(t)dt-\sum_{n=0}^{N}\frac{c_{n+1}}{n!}\int_0^A e^{-pt}t^n dt\right|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|c_{n+1}|}{n!}\int_0^A e^{-pt}t^n dt\leqslant \tag{169}$$

$$\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|c_{n+1}|}{n!}\int_0^{\infty}e^{-pt}t^n dt=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|c_{n+1}|}{p^{n+1}}<\varepsilon,\quad \forall N\geqslant N(\varepsilon).$$

Mai exact, din (169) rezultă că pentru orice $A>0$ și $p>R$ fixat, avem

$$(170)\qquad \left|\int_0^A e^{-pt}f(t)\,dt-\sum_{n=0}^{N}\frac{c_{n+1}}{n!}\int_0^A e^{-pt}t^n\,dt\right|<\varepsilon,\quad N\geqslant N(\varepsilon).$$

Fixînd în relația precedentă pe N și făcînd $A\to+\infty$, găsim

$$(171)\qquad \left|\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt-\sum_{n=0}^{N}\frac{c_{n+1}}{p^{n+1}}\right|<\varepsilon,$$

adevărată însă pentru orice $N\geqslant N(\varepsilon)$. Avînd în vedere că $\varepsilon>0$ era luat arbitrar, din (171) rezultă

$$(172)\qquad \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{p^{n+1}}=F(p),$$

adevărată pentru orice $p>R$. Din principiul identității funcțiilor olomorfe, rezultă însă

$$(173)\qquad \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=F(p)\ \text{pentru Re}\,p>R,$$

adică imaginea funcției $f=f(t)$ dată de (164) este în adevăr funcția dată $F=F(p)$, Q.E.D.

Observație. Expresia (164) a originalului $f=f(t)$ nu este necesar să fie reținută pe de rost. În adevăr, scriind

$$(174)\qquad F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}\frac{1}{p^{n+1}}$$

și ținînd seama că

$$(175)\qquad \frac{t^n}{n!}\leftrightarrow\frac{1}{p^{n+1}},\quad \text{Re}\,p>0,$$

obținem de mai sus că

$$(176)\qquad f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}\frac{t^n}{n!},\quad t\geqslant 0,$$

la fel ca și în cazul cînd ar fi vorba de o sumă finită de termeni și nu de o serie.

Exemplul 1. Să considerăm funcția

$$(177)\qquad F(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}},$$

care, după cum se vede, are două puncte singulare $p=\pm j$. Eliminînd segmentul axei imaginare care unește punctele $p=-j$ și $p=j$ se obține un domeniu în care se poate defini o ramură olomorfă a lui $F=F(p)$. Dacă impunem condiția că pentru $p=x>0$ radicalul să fie pozitiv, obținem cu ajutorul seriei binomiale din analiza matematică dezvoltarea

$$(178)\qquad F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{p^{2n+1}},\quad |p|>1.$$

De aceea, originalul va fi dat de seria

$$(179)\qquad f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n},\quad t\geqslant 0,$$

adică coincide cu funcția $J_0(t)$ a lui Bessel. A se revedea formula (307) din primul capitol. Prin urmare, am demonstrat că

$$(180)\qquad J_0(t)\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{p^2+1}},\qquad \text{Re}\,p>0,$$

unde valoarea radicalului se determină prin condiția precizată mai înainte.

Deoarece este evident că avem

$$(181)\qquad \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{p^2+1}=\text{imaginea lui }\sin t$$

are loc și relația

$$(182)\qquad \int_0^t J_0(t-\tau)J_0(\tau)\,d\tau=\sin t,\quad t\geqslant 0.$$

De fapt, relația precedentă are loc pentru orice t complex, deoarece atît $J_0(t)$ cît și $\sin t$ sînt funcții întregi (olomorfe în tot planul complex finit).

Exemplul 2. Să luăm funcţia

$$F(p)=\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}, \quad p\neq 0, \tag{183}$$

care este olomorfă pentru $\operatorname{Re} p>0$ şi satisface condiţia necesară (158) de a fi imagine. Avem

$$F(p)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1/p)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{p^{n+1}}, \quad p\neq 0 \tag{184}$$

şi folosind regula descrisă în teorema precedentă, putem scrie originalul

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2n}=J_0(2\sqrt{t}), \quad t\geqslant 0. \tag{185}$$

Aşadar, are loc şi relaţia

$$J_0(2\sqrt{t})\leftrightarrow\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}, \qquad \operatorname{Re} p>0. \tag{186}$$

Ne putem întreba acum dacă Teorema 2.17 admite reciprocă. Cu alte cuvinte, ne putem pune întrebarea dacă plecînd de la o funcţie original $f=f(t)$, a cărei dezvoltare în serie de puteri este cunoscută

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n, \quad t\geqslant 0 \tag{187}$$

este posibil să calculăm imaginea sa luînd separat imaginea fiecărui termen, adică să scriem

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{188}$$

Dacă acest lucru ar fi posibil, el ar constitui generalizarea firească, la cazul seriilor infinite, a cunoscutei reguli: „imaginea sumei este egală cu suma imaginilor".

Răspunsul la întrebarea formulată anterior este dat de

Teorema 2.18. *Dacă seria* (187) *are raza de convergenţă infinită şi suma are creştere exponenţială pentru* $t\to+\infty$, *atunci există*

un număr $R\geqslant 0$ *cu proprietatea că imaginea lui* $f=f(t)$ *se calculează în domeniul* $\operatorname{Re} p>R$ *după regula* (188).

Demonstraţie. Se poate arăta că, în condiţiile în care ne-am plasat aici, seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nn!t^n \tag{189}$$

are raza de convergenţă nenulă, cu alte cuvinte, există un număr pozitiv R' (este posibil şi cazul $R'=+\infty$) astfel că pentru $|t|<R'$ seria aceasta converge. Aceasta înseamnă însă că pentru $|p|>R=1/R'$ (este posibil şi cazul $R=0$), seria de tip Laurent

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{n!}{p^{n+1}} \tag{190}$$

este de asemenea convergentă. Teorema 2.17 ne garantează atunci că $F(p)$ dat de (190) este imaginea unei funcţii original, pe care o notăm $g=g(t)$, dată prin relaţia $g(t)=0$ pentru $t<0$ şi

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn!\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n, \quad t\geqslant 0. \tag{191}$$

De aici se vede însă că $g(t)=f(t)$ şi deci demonstraţia este încheiată. Putem scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} p>R \tag{192}$$

dacă, bineînţeles, sîntem în ipotezele Teoremei 2.18, şi R are semnificaţia precizată, adică este raza cercului în exteriorul căruia converge seria (190).

Exemplu. Să considerăm originalul

$$f(t)=t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t}) \text{ pentru } t\geqslant 0, \ (n\geqslant 0 \text{ întreg}). \tag{193}$$

Mai întîi, vom observa că

$$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}t^{n+k}, \tag{194}$$

deci, în conformitate cu teorema precedentă, ale cărei condiții sînt îndeplinite, putem scrie

$$(195)\quad t^{\frac{n}{2}} J_n\,(2\sqrt{t}) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \frac{(n+k)!}{p^{n+k+1}} = \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1/p)^k}{k!}$$

sau încă

$$(196)\quad t^{\frac{n}{2}} J_n\,(2\sqrt{t}) \leftrightarrow \frac{1}{p^{n+1}}\, e^{-\frac{1}{p}},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

relație care în cazul $n=0$ este cunoscută și coincide cu (186). Relația precedentă este valabilă pentru $\operatorname{Re} p>0$, după cum se poate vedea ușor.

Făcînd în (196) $n=1$, găsim

$$(197)\quad t^{\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{t}) \leftrightarrow \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}},\qquad \operatorname{Re} p>0,$$

de unde, dacă avem în vedere Teorema 2.13, găsim

$$(198)\quad \frac{t^{\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{t})}{t} \leftrightarrow \int_p^{\infty} \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}}\,dp,\quad \operatorname{Re} p>0,$$

sau într-o formă mai convenabilă

$$(199)\quad \frac{J_1(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \leftrightarrow 1-e^{-\frac{1}{p}},\quad \operatorname{Re} p>0.$$

Teorema precedentă admite generalizare la cazul funcțiilor original definite pentru $t\geqslant 0$ prin serii de forma

$$(200)\quad f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{sau} \quad f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n-\frac{1}{2}}.$$

Mai precis, este adevărată următoarea afirmație

Teorema 2.19. *Au loc relațiile*

$$(201)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\frac{1}{2}} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{p^{n+\frac{3}{2}}},\quad \operatorname{Re} p>R$$

și respectiv

$$(202)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n-\frac{1}{2}} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{p^{n+\frac{1}{2}}},\quad \operatorname{Re} p>R$$

cu condiția ca seriile din dreapta să conveargă pentru $|p|>R$.

Demonstrație. Ne vom ocupa numai de prima relație, deoarece a doua este justificată pe aceeași cale. Nu este restrictiv să presupunem în (201) că p este real, deoarece în cazul $p=$complex nu apar deosebiri esențiale. Fie deci p un număr pozitiv fixat, $p>R$ și $\varepsilon>0$ dat. Seria de tip Laurent din partea dreaptă a relației (201) converge absolut, așa că avem

$$(203)\quad \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{p^{n+\frac{3}{2}}} < \varepsilon,\quad \forall N \geqslant N(\varepsilon),$$

unde $N(\varepsilon)$ este un număr natural, depinzînd numai de ε, atîta vreme cît p este fixat. Seria de funcții din stînga relației (201), a cărei sumă o notăm cu $f(t)$ pentru $t\geqslant 0$ este bineînțeles, presupusă convergentă. Ea converge uniform pe orice interval finit de forma $0\leqslant t\leqslant A$, prin urmare și seria

$$(204)\quad e^{-pt} f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-pt} t^{n+\frac{1}{2}},\quad t\geqslant 0$$

are aceeași proprietate. Este permisă deci integrarea termen cu termen în (204), astfel că putem scrie

$$\left|\int_0^A e^{-pt} f(t)\,dt - \sum_{n=0}^{N} a_n \int_0^A e^{-pt} t^{n+\frac{1}{2}}\,dt\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \int_0^A e^{-pt} t^{n+\frac{1}{2}}\,dt \leqslant$$

$$(205)\quad \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{n+\frac{1}{2}}\,dt = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{p^{n+\frac{3}{2}}} < \varepsilon,$$

pentru orice $N \geqslant N(\varepsilon)$. Fixînd în (205) pe N şi făcînd $A \to +\infty$, găsim

$$(206) \qquad \left| \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt - \sum_{n=0}^{N} a_n \int_0^\infty e^{-pt} t^{n+\frac{1}{2}}\,dt \right| \leqslant \varepsilon,$$

adevărată însă pentru orice $N \geqslant N(\varepsilon)$. Aceasta este totuna cu a spune că

$$(207) \qquad \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{p^{n+\frac{3}{2}}}, \quad p > R,$$

cu alte cuvinte, relaţia (201) este demonstrată pentru p real, $p > R$. Exact la fel se raţionează şi în cazul p = complex cu $\operatorname{Re} p > R$, astfel că putem socoti demonstraţia terminată.

Exemplul 1. Să găsim imaginea funcţiei $f(t) = \sin 2\sqrt{t}$, $t \geqslant 0$. Dezvoltînd această funcţie în serie, obţinem

$$(208) \qquad \sin 2\sqrt{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{n+\frac{1}{2}}, \quad t \geqslant 0.$$

Deoarece

$$(209) \qquad \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!}, \quad n \geqslant 0,$$

se vede că seria din dreapta relaţiei (201) converge pentru $|p| > 0$. Vom avea deci, luînd în (208) imaginea termen cu termen, aşa cum ne garantează Teorema 2.19, relaţia următoare

$$(210) \quad \sin 2\sqrt{t} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{p^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/p)^n}{n!},$$

sau în formă mai concisă

$$(211) \qquad \sin 2\sqrt{t} \leftrightarrow \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{1}{p}}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

unde în mod evident, prin $\sqrt{p}$ se înţelege ramura care pentru $p = x > 0$ se reduce la radicalul aritmetic.

Exemplul 2. Să găsim imaginea funcţiei $f(t) = (\cos 2\sqrt{t}) / \sqrt{t}$, $t > 0$. Dezvoltînd funcţia în serie, obţinem

$$(212) \qquad \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} t^{n-\frac{1}{2}}, \quad t > 0$$

şi deoarece

$$(213) \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}(n-1)!}, \quad n \geqslant 1,$$

putem scrie, luînd în (212) imaginea termen cu termen, relaţia

$$(214) \qquad \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/p)^n}{n!}\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{1}{p}}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

cu aceeaşi observaţie ca şi în exerciţiul precedent, în ce priveşte valoarea lui $\sqrt{p}$. Funcţia din acest exemplu nu este original în sensul definiţiei date la începutul capitolului, deoarece se vede că în origine nu are limite laterale finite ($f(0+) = +\infty$), deşi în toate celelalte puncte este continuă. Dar definiţia (6) are sens şi în cazul de faţă. Am mai fi putut deduce relaţia (214) plecînd de la observaţia că funcţia din exemplul de faţă este derivata funcţiei $\sin 2\sqrt{t}$. Bazaţi pe Teorema 2.6 rezultă

$$(215) \qquad \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{1}{p}}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

deoarece $\lim \sin 2\sqrt{t} = 0$ pentru $t \to 0 (t \geqslant 0)$.

Exemplul 3. Să se afle imaginile funcţiilor ($t \geqslant 0$)

$$(216) \quad f_1(t) = \operatorname{sh} 2\sqrt{t}, \; f_2(t) = \frac{\operatorname{ch} 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}, \; f_3(t) = \frac{\operatorname{ch} 2\sqrt{t} + \cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}.$$

Indicaţie. Este suficient să se afle numai imaginea funcţiei $f_1(t)$; se va observa apoi că $f_2(t)$ este derivata lui $f_1(t)$ şi că $f_3(t)$

este suma a două funcţii ale căror imagini sînt cunoscute. Acestea fiind spuse, vom scrie

$$\text{(217)}\qquad \operatorname{sh} 2\sqrt{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\,t^{n+\frac{1}{2}}\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{p^{n+\frac{3}{2}}}$$

sau, dacă ţinem seama de (209),

$$\text{(218)}\qquad \operatorname{sh} 2\sqrt{t}\leftrightarrow\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/p)^n}{n!}=\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{\frac{1}{p}},\qquad \operatorname{Re} p>0.$$

Vom demonstra acum un rezultat referitor la imaginea produsului aritmetic a două funcţii original. Dacă se defineşte în mod convenabil convoluţia a două imagini, conţinutul teoremei care urmează poate fi rezumat astfel: „imaginea produsului aritmetic a două originale este egală cu produsul de convoluţie al imaginilor", de unde se vede că, într-un anumit fel, această teoremă poate fi socotită reciproca Teoremei 2.10.

Teorema 2.20. *Dacă*

$$\text{(219)}\qquad f_i(t)\leftrightarrow F_i(p),\quad \operatorname{Re} p>a_i,\quad i=1,\,2,$$

atunci

$$\text{(220)}\qquad f(t)=f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow F(p)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}F_1(q)F_2(p-q)\,dq,$$

unde $F=F(p)$ este olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p>a_1+a_2$, iar integrarea se face pe orice dreaptă de abscisă x constantă,

$$a_1<x<\operatorname{Re} p-a_2.$$

Demonstraţie. Dacă $f_1(t)$ are exponentul de creştere a_1, iar $f_2(t)$ are exponentul de creştere a_2, atunci este uşor de văzut că produsul $f(t)=f_1(t)f_2(t)$ are exponentul de creştere cel mult egal cu a_1+a_2, prin urmare afirmaţia că imaginea sa $F=F(p)$ este definită şi olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p>a_1+a_2$ este banală.

Din definiţia imaginii rezultă că

$$\text{(221)}\qquad F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f_1(t)f_2(t)\,dt,\qquad \operatorname{Re} p>a_1+a_2.$$

Numărul complex p cu $\operatorname{Re} p>a_1+a_2$ fiind fixat, să alegem x real astfel încît $a_1<x<\operatorname{Re} p-a_2$. Din formula de inversare rezultă

$$\text{(222)}\qquad f_1(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}e^{qt}F_1(q)\,dq,\qquad x>a_1,$$

în toate punctele de continuitate ale lui $f_1=f_1(t)$. Înlocuind expresia lui $f_1(t)$ în (221), găsim

$$\text{(223)}\qquad F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f_2(t)\left(\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}e^{qt}F_1(q)\,dq\right)dt,$$

valabilă pentru orice $x>a_1$. Dacă impunem însă lui x şi restricţia $x<\operatorname{Re} p-a_2$ şi schimbăm ordinea de integrare în (223), rezultă

$$\text{(224)}\qquad F(p)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}F_1(q)\left(\int_0^{\infty}e^{-(p-q)t}f_2(t)\,dt\right)dq,$$

şi în plus, deoarece $\operatorname{Re}(p-q)=\operatorname{Re} p-x>a_2$, avem dreptul să scriem şi relaţia

$$\text{(225)}\qquad \int_0^{\infty}e^{-(p-q)t}f_2(t)\,dt=F_2(p-q).$$

Din ultimele două egalităţi se obţine imediat relaţia (220), care este astfel demonstrată. Mai observăm că pe dreapta în lungul căreia integrăm, atît $F_1(q)$ cît şi $F_2(p-q)$ sînt olomorfe, deci produsul $F_1(q)\cdot F_2(p-q)$ nu are puncte singulare situate pe ea.

Observaţie. În mod cu totul asemănător se obţine şi relaţia

$$\text{(226)}\qquad F(p)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}F_1(p-q)F_2(q)\,dq,\ \operatorname{Re} p>a_1+a_2,$$

unde de data aceasta avem $a_2<x<\operatorname{Re} p-a_1$.

Exemplu. Să luăm $f_1(t)=\sin\alpha t$ şi $f_2(t)=t$, $t\geqslant 0$. Deoarece

$$\text{(227)}\qquad \sin\alpha t\leftrightarrow\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\quad\text{şi}\quad t\leftrightarrow\frac{1}{p^2},\qquad \operatorname{Re} p>0$$

vom avea, conform teoremei precedente

$$(228)\qquad t\sin\alpha t \leftrightarrow F(p)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}\frac{\alpha\,dq}{(q^2+\alpha^2)(p-q)^2},\quad \mathrm{Re}\,p>0,$$

unde variabila de integrare q parcurge dreapta de abscisă x, paralelă cu axa imaginară, $0<x<\mathrm{Re}\,p$. Considerînd conturul format din segmentul care unește punctele $x-jR$ cu $x+jR$ și semicercul drept al cercului de ecuație $|p-x|=R$, se obține, făcînd pe $R\to+\infty$ că

$$(229)\quad F(p)=-\mathrm{Rez}\left[\frac{\alpha}{(q^2+\alpha^2)(p-q)^2};\ q=p\right]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\frac{\alpha}{q^2+\alpha^2}\right]_{q=p}=\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}.$$

Am luat reziduul cu semn schimbat, deoarece conturul despre care am vorbit era parcurs în sens invers. Prin urmare, avem

$$(230)\qquad t\sin\alpha t\leftrightarrow\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2},\quad \mathrm{Re}\,p>0,$$

relație care, desigur, se putea obține mai ușor pe altă cale și anume plecînd de la formula (100). Am presupus mai sus că α este real.

Din Teorema 2.20 se poate deduce o formulă importantă în multe aplicații. Mai întîi, să facem observația că dacă notăm cu $F(p)$ imaginea unei funcții original $f(t)$, atunci imaginea funcției conjugate $\overline{f(t)}$ va fi $\overline{F(\bar{p})}$. În adevăr, dacă notăm

$$(231)\qquad G(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{Re}\,p>a,$$

unde a este exponentul comun de creștere al funcțiilor $f(t)$ și $\overline{f(t)}$, atunci evident că putem scrie

$$(232)\qquad G(p)=\overline{\left(\int_0^\infty e^{-\bar{p}t}f(t)\,\mathrm{d}t\right)}=\overline{F(\bar{p})},\qquad \mathrm{Re}\,p>a.$$

Să aplicăm acum formula (220) funcțiilor $f_1(t)=f(t)$ și $f_2(t)=\overline{f(t)}$. Vom avea

$$(233)\qquad \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}F(q)G(p-q)\,\mathrm{d}q,$$

unde p este un număr complex cu $\mathrm{Re}\,p>a+a=2a$, integrarea făcîndu-se pe o dreaptă de abscisă constantă x, cu $a<x<\mathrm{Re}\,p-a$. Să luăm $p=\text{real}>2a$ și să alegem x la mijlocul segmentului $[a,\ p-a]$, adică să luăm $x=p/2$. Deoarece variabila de integrare q este de forma $q=x+jy$ cu x constant și y variabil, găsim ușor că

$$(234)\qquad F(q)G(p-q)=F(x+jy)\,\overline{F(x+jy)}=|F(x+jy)|^2,$$

astfel că formula (233) poate fi scrisă acum sub forma

$$(235)\qquad \int_0^\infty e^{-2xt}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+jy)|^2\,\mathrm{d}y,$$

unde $x>a$ este un număr real oarecare. În particular, dacă exponentul de creștere al funcției $f(t)$ este negativ, avem voie să dăm aici lui x valoarea 0, obținînd o formulă demonstrată de Parseval și anume

$$(236)\qquad \int_0^\infty|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(jy)|^2\,\mathrm{d}y.$$

Mai general, se poate demonstra următoarea

Teorema 2.21. *Dacă funcția original $f=f(t)$ satisface condiția*

$$237)\qquad \int_0^\infty|f(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty,\qquad \int_0^\infty|f(t)|^2\,\mathrm{d}t<+\infty,$$

atunci are loc formula lui Parseval (236), *unde prin $F=F(p)$ s-a notat transformata Laplace a funcției date $f=f(t)$.*

O altă egalitate interesantă, demonstrată tot de către Parseval, este aceasta: dacă

$$(238)\qquad f_i(t)\leftrightarrow F_i(p)\quad \mathrm{Re}\,p>0\quad i=1,2$$

și integrala generalizată

$$(239)\qquad \iint_D e^{-t\tau}f_1(t)f_2(\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau$$

este absolut convergentă, D fiind domeniul din fig. 2.1, atunci

$$(240)\qquad \int_0^\infty F_1(t)f_2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty f_1(t)F_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pentru a justifica această egalitate, vom observa că

$$\int_0^\infty f_1(t)F_2(t)\,dt=\int_0^\infty f_1(t)\left(\int_0^\infty e^{-t\tau}f_2(\tau)\,d\tau\right)dt \tag{241}$$

și vom schimba ordinea de integrare, obținînd

$$\int_0^\infty f_1(t)F_2(t)\,dt=\int_0^\infty f_2(\tau)\left(\int_0^\infty e^{-t\tau}f_1(t)\,dt\right)d\tau=\int_0^\infty f_2(\tau)F_1(\tau)\,d\tau, \tag{242}$$

care este echivalentă cu (240).

Aplicație. Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty (J_0(t)-e^{-at})\frac{dt}{t}, \qquad a>0. \tag{242}$$

Luînd $f_1(t)=1$ și $f_2(t)=J_0(t)-e^{-at}$, avem

$$F_1(p)=\frac{1}{p}, \quad F_2(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}-\frac{1}{p+a}, \quad \operatorname{Re} p>0. \tag{243}$$

Înlocuind în formula Parseval (240), găsim că

$$\int_0^\infty (J_0(t)-e^{-at})\frac{dt}{t}=\int_0^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{t+a}\right)dt=\ln 2a. \tag{244}$$

Înainte de a arăta aplicațiile transformatei Laplace în diverse probleme concrete, să mai calculăm imaginile funcțiilor Bessel de indice întreg $J_n(t)$ și $I_n(t)$, folosind reprezentările integrale (381) și (384) din capitolul întîi.

Din (381) rezultă următoarea formulă

$$J_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{j(n\varphi-t\sin\varphi)}\,d\varphi, \tag{245}$$

astfel că dacă notăm cu $F(p)$ imaginea acestei funcții, găsim

$$F(p)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^{2\pi} e^{j(n\varphi-t\sin\varphi)}\,d\varphi\right)dt. \tag{246}$$

Schimbînd ordinea de integrare, vom avea mai departe

$$F(p)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{jn\varphi}}{p+j\sin\varphi}\,d\varphi, \tag{247}$$

iar dacă punem $e^{j\varphi}=z$, $d\varphi=(1/jz)dz$ și ținem seama că $\sin\varphi=(z-z^{-1})/2j$, ajungem la concluzia că

$$F(p)=\frac{1}{\pi j}\int_{|z|=1}\frac{z^n dz}{z^2+2pz-1}, \tag{248}$$

integrarea făcîndu-se pe cercul unitate $|z|=1$. În interiorul acestui cerc, funcția de sub integrală are un singur pol (simplu) și anume $z_1=-p+\sqrt{p^2+1}$. Prin urmare, reziduul în acest punct se calculează foarte simplu, integrala $F(p)$ fiind dublul acestui reziduu. În concluzie, avem

$$F(p)=2\left[\frac{z^n}{z+p+\sqrt{p^2+1}}\right]_{z=z_1}=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n, \tag{249}$$

ceea ce ne dă dreptul să scriem pentru $n\geqslant 0$

$$J_n(t)\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n, \quad \operatorname{Re} p>0. \tag{250}$$

Pentru calcularea imaginii funcției Bessel modificate $I_n(t)$, vom pleca de la formula amintită (384) din primul capitol și vom observa mai întîi că putem scrie

$$I_n(t)=\frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{t\cos\varphi+jn(\pi-\varphi)}\,d\varphi. \tag{251}$$

Făcînd aici substituția $\pi-\varphi=u$ și revenind din nou la variabila de integrare notată cu φ, putem deduce din (251) că

$$I_n(t)=\frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\cos\varphi+jn\varphi}\,d\varphi. \tag{252}$$

Dacă notăm cu $G(p)$ imaginea acestei funcții, adică

$$G(p)=\frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\cos\varphi+jn\varphi}d\varphi\right)dt \tag{253}$$

și schimbăm ordinea de integrare, găsim că

$$G(p)=\frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{jn\varphi}}{p+\cos\varphi}\,d\varphi,\quad \mathrm{Re}\,p>1. \tag{254}$$

Dacă punem $e^{j\varphi}=z$ și ținem seama că $\cos\varphi=(z+z^{-1})/2$, ajungem la concluzia că

$$G(p)=\frac{(-1)^n}{\pi j}\int_{|z|=1}\frac{z^n dz}{z^2+2pz+1}. \tag{255}$$

În interiorul cercului unitate $|z|=1$, funcția de sub integrală are un singur pol (simplu) și anume $z_1=-p+\sqrt{p^2-1}$. În concluzie, avem

$$G(p)=2(-1)^n\left[\frac{z^n}{z+p+\sqrt{p^2-1}}\right]_{z=z_1}=\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}(p-\sqrt{p^2-1})^n, \tag{256}$$

ceea ce dă dreptul să scriem pentru $n\geqslant 0$

$$I_n(t)\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}(p-\sqrt{p^2-1})^n,\quad \mathrm{Re}\,p>1. \tag{257}$$

În particular, pentru funcția $I_0(t)$ putem scrie

$$I_0(t)\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{p^2-1}},\quad \mathrm{Re}\,p>1, \tag{258}$$

unde, ca și în cazurile precedente, valoarea radicalului se alege astfel încît pentru $p=x>1$ să se reducă la radicalul aritmetic.

Plecînd de la funcția $I_0(z)$, care este suma unei serii de puteri convergentă pentru orice z complex, vom defini alte două funcții original, notate ber(x) și bei(x), prin relația următoare

$$I_0(xe^{j\frac{\pi}{4}})=\mathrm{ber}(x)+j\,\mathrm{bei}(x),\quad x\ \text{real}. \tag{259}$$

Folosind dezvoltarea

$$I_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k},\quad z=\text{complex}, \tag{260}$$

găsim expresiile funcțiilor ber(x) și bei(x) după cum urmează

$$\mathrm{ber}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{((2k)!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k},\quad \mathrm{bei}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{((2k+1)!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+2}. \tag{261}$$

În legătură cu aceste două funcții, se poate arăta că

$$\mathrm{ber}(2\sqrt{t})\leftrightarrow\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p},\quad \mathrm{bei}(2\sqrt{t})\leftrightarrow\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p},\quad \mathrm{Re}\,p>0, \tag{262}$$

folosind Teorema 2.18. Este suficient să justificăm prima afirmație; pentru cea de a doua se procedează la fel. Vom avea

$$\mathrm{ber}(2\sqrt{t})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{((2k)!)^2}t^{2k}\leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{((2k)!)^2}\frac{(2k)!}{p^{2k+1}} \tag{263}$$

și nu este greu de văzut că suma seriei din dreapta este $(1/p)\cos(1/p)$.

2.2. APLICAȚII ALE TRANSFORMATEI LAPLACE. METODA OPERAȚIONALĂ

Ca o primă observație putem spune că teoremele și regulile de calcul stabilite în secțiunea precedentă permit, în mod implicit, aflarea unor integrale generalizate de forma $\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t)dt$, în care p joacă rolul unui parametru.

În adevăr, dacă scriem, de exemplu, bazați pe relația (108)

$$\frac{\sin t}{t}\leftrightarrow\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\,p,\qquad \mathrm{Re}\,p>0, \tag{264}$$

aceasta înseamnă de fapt că

$$\int_0^{\infty}e^{-pt}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\,p,\quad \mathrm{Re}\,p>0, \tag{265}$$

de unde, avem în particular pentru orice $a>0$

$$(266)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} a.$$

Să presupunem că avem integrala

$$(267)\qquad \int_0^\infty te^{-at}\sin bt\,dt,\quad a>0\quad b=\text{real}.$$

Aceasta va fi imaginea funcției $t\sin bt$, calculată în punctul $a>0$. Dar după cum se știe din (230)

$$(268)\qquad t\sin bt\leftrightarrow\frac{2pb}{(p^2+b^2)^2},\qquad \operatorname{Re} p>0,$$

prin urmare, rezultă imediat că avem

$$(269)\qquad \int_0^\infty te^{-at}\sin bt\,dt=\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2},\quad a>0,\quad b=\text{real}.$$

Să mai dăm un ultim exemplu de acest fel; fie de calculat

$$(270)\qquad \int_0^\infty e^{-at}J_0(bt)dt,\quad a>0,\quad b>0.$$

Plecînd de la relația (180) care ne dă imaginea funcției $J_0(t)$ și aplicînd Teorema 2.3, găsim imediat că

$$(271)\qquad J_0(bt)\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{p^2+b^2}}\qquad \operatorname{Re} p>0,$$

ceea ce înseamnă că integrala (270) are valoarea $(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Exercițiu. Folosind transformata Laplace, să se arate că

$$(272)\qquad \int_0^\infty \frac{1-e^{-at}}{te^t}\,dt=\ln(1+a),\qquad \int_0^\infty e^{-at^2}\cos 2bt\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{a}},$$

unde $a>0$, b real oarecare.

Una dintre cele mai importante aplicații ale transformatei Laplace este metoda operațională de rezolvare a ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți. Vom considera ecuația de forma

$$(273)\qquad a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)=f(t),\quad t\geqslant 0,$$

în care coeficienții a_i, $i=\overline{0,n}$ sînt constanți, iar $f=f(t)$ este o funcție original dată. În acest caz, se poate arăta că soluția $y=y(t)$ care satisface condițiile inițiale

$$(274)\qquad y(0)=\alpha_0,\ y'(0)=\alpha_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0)=\alpha_{n-1}$$

este unic determinată, definită pentru toți $t\geqslant 0$ și admite creștere exponențială pentru $t\to+\infty$, cu alte cuvinte este ea însăși o funcție original, deocamdată necunoscută. Notînd imaginea lui $y(t)$ cu $Y(p)$, vom putea scrie

$$(275)\qquad y'(t)\leftrightarrow pY(p)-\alpha_0,\ y''(t)\leftrightarrow p^2Y(p)-p\alpha_0-\alpha_1,\ \ldots,$$

$$\ldots,\ y^{(n)}(t)\leftrightarrow p^nY(p)-p^{n-1}\alpha_0-p^{n-2}\alpha_1-\ldots-p\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1},$$

bazați pe Teorema 2.7 (derivarea originalului). Notînd imaginea lui $f(t)$ cu $F(p)=$ cunoscută și luînd în (273) transformata ambilor membri ai egalității, obținem

$$(276)\qquad P(p)Y(p)+Q(p)=F(p),$$

unde $P(p)$ este polinomul caracteristic al ecuației (273), care reamintim că are expresia

$$(277)\qquad P(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n,\quad a_0\neq 0,$$

iar $Q(p)$ este un anumit polinom, cu coeficienții cunoscuți și de grad cel mult egal cu $n-1$, după cum se poate ușor vedea. Din (276) obținem imediat că

$$(278)\qquad Y(p)=\frac{F(p)-Q(p)}{P(p)}=G(p)=\text{cunoscută},$$

egalitate valabilă într-un semiplan de forma $\operatorname{Re} p>A$, cu A suficient de mare. Aflarea originalului, adică a soluției $y=y(t)$

care satisface (273)+(274), se face folosind formula de inversare Mellin-Fourier

$$y(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{pt}G(p)\,dp,\quad x>A. \tag{279}$$

Dacă $G=G(p)$ este o fracție rațională (cazul cel mai des întîlnit în exerciții), ea are un număr finit de poli $p_1, p_2, \ldots, p_m$ și atunci după cum se știe, putem scrie

$$y(t)=\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Rez}\,[e^{pt}G(p);\ p=p_k]. \tag{280}$$

Exemplu. Să se afle soluția problemei

$$y''(t)-2y'(t)=e^t(t^2+t-3),\ y(0)=2,\ y'(0)=2. \tag{281}$$

Rezolvare. Notînd cu $Y(p)$ imaginea lui $y(t)$, avem

$$y'(t)\leftrightarrow pY(p)-2,\ y''(t)\leftrightarrow p^2Y(p)-2p-2. \tag{282}$$

De asemenea, deoarece

$$e^t(t^2+t-3)\leftrightarrow\frac{-3p^2+7p-2}{(p-1)^3},\quad \operatorname{Re} p>1, \tag{283}$$

vom găsi în final că

$$Y(p)=\frac{2p^3-8p^2+9p-1}{(p-2)\ (p-1)^3}=G(p),\ \operatorname{Re} p>2. \tag{284}$$

Această funcție are un pol triplu $p_1=1$ și un pol simplu $p_2=2$. Vom avea

$$\operatorname{Rez}[e^{pt}G(p);\ p=1]=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}[e^{pt}G(p)(p-1)^3]_{p=1}=e^t(1-t-t^2) \tag{285}$$

și corespunzător

$$\operatorname{Rez}[e^{pt}G(p);\ p=2]=\lim_{p\to 2} e^{pt}G(p)(p-2)=e^{2t}, \tag{286}$$

deci, conform cu (280), soluția problemei (281) este dată de

$$y(t)=e^{2t}+e^t(1-t-t^2). \tag{287}$$

Uneori, dacă $G(p)$ este o fracție rațională, se folosește procedeul descompunerii ei în fracții simple și citirea originalului după formula dicționar (100). Astfel, în cazul de față avem descompunerea

$$Y(p)=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{(p-1)^3}+\frac{C}{(p-1)^2}+\frac{D}{p-1}, \tag{288}$$

în care coeficienții au valorile $A=1$, $B=-2$, $C=-1$, $D=1$. Căutînd originalele acestor funcții simple și adunîndu-le, regăsim pentru $y(t)$ expresia cunoscută (287).

Exercițiu. Să se afle soluția problemei

$$y'''(t)-3y'(t)+2y(t)=8te^{-t},\ y(0)=y'(0)=0,\ y''(0)=1. \tag{289}$$

Indicație. Procedînd ca și în exemplul precedent, se găsește soluția

$$y(t)=e^{-2t}+2te^{-t}+(t-1)e^t. \tag{290}$$

Un caz realmente interesant în chestiunea de care ne ocupăm se prezintă atunci cînd imaginea funcției original $f=f(t)$ nu este cunoscută. Astfel, să presupunem că avem de rezolvat problema

$$a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)=f(t),\ t\geqslant 0 \tag{291}$$

$$y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0$$

și că imaginea $F(p)$ a funcției original $f(t)$ nu se află în nici unu din tabelele care conțin transformatele Laplace ale diverselor funcții uzuale. Notînd ca de obicei imaginea soluției $y=y(t)$ a problemei precedente, cu $Y=Y(p)$, obținem $P(p)Y(p)=F(p)$, de unde se găsește că

$$Y(p)=\frac{F(p)}{P(p)}=F(p)p\,\frac{1}{p\,P(p)}. \tag{292}$$

Acum, vom observa că $1/pP(p)$ este imaginea funcției $z=z(t)$ care satisface condițiile

$$a_0z^{(n)}(t)+a_1z^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}z'(t)+a_nz(t)=1 \tag{293}$$

$$z(0)=z'(0)=\ldots=z^{(n-1)}(0)=0$$

și că prin urmare, $p(1/pP(p))=1/P(p)$ este imaginea funcției $z'(t)$, adică a derivatei funcției $z(t)$. Ținînd seama de regula care dă ima-

ginea produsului de convoluție a două originale, din (292) rezultă atunci că

$$y(t)=(f*z')(t)=\int_0^t f(t-\tau)z'(\tau)\,d\tau, \quad t\geqslant 0. \tag{294}$$

Deoarece $f=f(t)$ este dată, iar $z=z(t)$ se determină în mod unic din (293), tragem concluzia că formula precedentă ne exprimă soluția căutată a problemei (291) numai în funcție de cantități cunoscute.

Exemplul 1. Să se afle $y=y(t)$ care verifică condițiile

$$y''(t)+4y(t)=\frac{1}{1+t^2},\ t\geqslant 0;\ y(0)=y'(0)=0. \tag{295}$$

Rezolvare. Considerăm mai întîi problema

$$z''(t)+4z(t)=1,\quad z(0)=z'(0)=0, \tag{296}$$

care are soluția $z(t)=(1-\cos 2t)/4$. Funcția căutată va fi deci

$$y(t)=\int_0^t \frac{1}{1+(t-\tau)^2}\,\frac{\sin 2\tau}{2}\,d\tau,\ t\geqslant 0. \tag{297}$$

Exemplul 2. Să se scrie soluția problemei

$$y^{(n)}(t)=f(t),\ t\geqslant 0;\ y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0. \tag{298}$$

Rezolvare. Se presupune că $f(t)$ este o funcție original, a cărei imagine este sau nu este cunoscută. În cazul de față, $z(t)$ verifică condițiile

$$z^{(n)}(t)=1,\ z(0)=z'(0)=\ldots=z^{(n-1)}(0)=0, \tag{299}$$

de unde rezultă $z(t)=t^n/n!$ Putem deci scrie soluția problemei (298) în forma

$$y(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(t-\tau)\tau^{n-1}d\tau= \tag{300}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau,\ t\geqslant 0.$$

Se poate deduce și o formulă mai explicită pentru soluția problemei generale (291), dacă se face ipoteza restrictivă că polinomul caracteristic are toate rădăcinile distincte. Dacă notăm aceste rădăcini cu $p_1, p_2, \ldots p_n$ putem scrie

$$\frac{F(p)}{P(p)}=\frac{A_1}{p-p_1}F(p)+\frac{A_2}{p-p_2}F(p)+\ldots+\frac{A_n}{p-p_n}F(p), \tag{301}$$

și se știe că coeficienții A_k au valoarea $1/P'(p_k)$, $k=\overline{1,n}$. Deoarece aceasta este imaginea soluției $y(t)$ căutate, vom obține de mai sus că

$$y(t)=\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(p_k)}\int_0^t e^{p_k(t-\tau)}f(\tau)d\tau=\sum_{k=1}^n \frac{e^{p_k t}}{P'(p_k)}\int_0^t e^{-p_k\tau}f(\tau)d\tau. \tag{302}$$

Astfel, am demonstrat următoarea

Teorema 2.22. *În ipoteza că polinomul caracteristic are toate rădăcinile distincte, soluția problemei* (291) *se exprimă prin formula* (302).

Facem observația că formula (302) este un caz particular al formulei (281) sau al echivalentei cu ea (282), demonstrate în primul capitol și că Teorema 2.22 este deci un caz particular al Propoziției 1.20.

Dacă dorim să găsim soluția problemei generale

$$\begin{aligned} &a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(t),\quad t\geqslant 0,\\ &y(0)=\alpha_0,\ y'(0)=\alpha_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0)=\alpha_{n-1}, \end{aligned} \tag{303}$$

în care imaginea lui $f(t)$ nu este cunoscută, sau este greu de aflat, putem nota $y=u+v$, unde $u=u(t)$ verifică condițiile

$$\begin{aligned} &a_0u^{(n)}+a_1u^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}u'+a_nu=0\\ &u(0)=\alpha_0,\ u'(0)=\alpha_1,\ \ldots,\ u^{(n-1)}(0)=\alpha_{n-1}, \end{aligned} \tag{304}$$

iar $v=v(t)$ verifică condițiile

$$\begin{aligned} &a_0v^{(n)}+a_1v^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}v'+a_nv=f(t),\quad t\geqslant 0,\\ &v(0)=v'(0)=\ldots=v^{(n-1)}(0)=0, \end{aligned} \tag{305}$$

reducînd astfel problema dată (303), la două probleme mai simple (304) și (305), pe care știm să le rezolvăm. Procedeul descris aici are avantajul că nu presupune aplicarea mecanică a unor formule, așa cum se făcea în Propoziția 1.20, de exemplu, și în plus nu ține seama de faptul dacă rădăcinile polinomului caracteristic sînt

simple sau confundate, fiind deci cu un grad mai mare de generalitate.

Să rezolvăm acum ecuația integro-diferențială

$$(306)\qquad L\frac{di}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau=f(t),\quad t\geqslant 0\quad i(0)=0,$$

în care funcția necunoscută $i=i(t)$ reprezintă intensitatea curentului într-un anumit circuit, iar $f=f(t)$ este o funcție original dată.

Dacă notăm imaginea lui $i=i(t)$ cu $I=I(p)$, avem

$$(307)\qquad \int_0^t i(\tau)\,d\tau\leftrightarrow\frac{1}{p}I(p),\quad \frac{di}{dt}\leftrightarrow pI(p)-i(0)=pI(p).$$

Luînd transformata Laplace în ambii membri ai ecuației (306) găsim

$$(308)\qquad LpI(p)+RI(p)+\frac{1}{Cp}I(p)=F(p),$$

sau încă

$$(309)\qquad I(p)=\frac{CpF(p)}{LCp^2+RCp+1}.$$

Polii funcției imagine sînt rădăcinile numitorului, adică în cazul acesta

$$(310)\qquad p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\beta,$$

unde $\beta>0$ dacă expresia de sub radical este pozitivă și β este de forma $j\omega$ dacă această expresie este negativă. Prin urmare

$$(311)\qquad I(p)=CF(p)\left[\frac{-\alpha+\beta}{2\beta(p-p_1)}+\frac{\alpha+\beta}{2\beta(p-p_2)}\right],$$

de unde găsim originalul, adică funcția căutată

$$(312)\qquad i(t)=\frac{C(-\alpha+\beta)}{2\beta}\int_0^t e^{(-\alpha+\beta)(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau+$$
$$+\frac{C(\alpha+\beta)}{2\beta}\int_0^t e^{(-\alpha-\beta)(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau.$$

În ipoteza $\beta=0$, ceea ce este echivalent cu $R^2=4L/C$, găsim pentru $I(p)$ valoarea

$$(313)\qquad I(p)=\frac{1}{L}F(p)\left[\frac{1}{p+\alpha}-\frac{\alpha}{(p+\alpha)^2}\right],$$

de unde găsim originalul

$$(314)\quad i(t)=\frac{1}{L}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau-\frac{\alpha}{L}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad t\geqslant 0,$$

unde bineînțeles, $\alpha=R/2L$ ca și în cazul precedent.

Exercițiu. Dacă imaginea unei funcții original $f=f(t)$ are forma

$$(315)\qquad F(p)=\frac{G(p)}{pN(p)},$$

unde $G=G(p)$ și $N=N(p)$ sînt polinoame, ultimul avînd rădăcinile simple și nenule $p_1, p_2, \ldots, p_n$, să se arate că

$$(316)\qquad f(t)=\frac{G(0)}{N(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{G(p_k)}{p_kN'(p_k)}e^{p_kt},\quad t\geqslant 0.$$

Rezolvare. Polii funcției $F=F(p)$ sînt $0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ și prin ipoteză sînt toți simpli. Aplicînd formula de inversare Mellin-Fourier, se știe că obținem

$$(317)\qquad f(t)=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Rez}[e^{pt}F(p);\ p=p_k],$$

unde $p_0=0$. Deoarece în cazul de față avem

$$(318)\quad \operatorname{Rez}[e^{pt}F(p);\ p=p_k]=\lim_{p\to p_k}e^{pt}F(p)(p-p_k)=\frac{G(p_k)}{p_kN'(p_k)}e^{p_kt},$$

pentru $k=\overline{1,n}$ și

$$(319)\qquad \operatorname{Rez}[e^{pt}F(p);\ p=0]=\lim_{p\to 0}e^{pt}F(p)p=\frac{G(0)}{N(0)},$$

înlocuind în (317) obținem pentru $f(t)$ expresia căutată.

Ca o aplicație a formulei (316), să aflăm originalul $i=i(t)$, știind că imaginea sa este

$$I(p)=\frac{U_0}{L}\cdot\frac{p+\frac{1}{RC}}{p\left(p^2+\frac{1}{RC}p+\frac{1}{LC}\right)}. \tag{320}$$

Funcția $i=i(t)$ reprezintă intensitatea curentului în anumite circuite electrice. Referindu-ne la expresia (315), avem

$$G(p)=\frac{U_0}{L}\left(p+\frac{1}{RC}\right), \quad N(p)=p^2+\frac{1}{RC}p+\frac{1}{LC}, \tag{321}$$

iar p_1 și p_2 sînt dați de

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\beta, \tag{322}$$

unde $\beta>0$ dacă expresia de sub radical este pozitivă și β este de forma $j\omega$ dacă această expresie este negativă. Calculînd mărimile care apar în (316), găsim

$$\frac{G(0)}{N(0)}=\frac{U_0}{R}, \quad \frac{G(p_1)}{p_1N'(p_1)}=\frac{U_0}{L}\,\frac{\alpha+\beta}{(-\alpha+\beta)2\beta}, \quad \frac{G(p_2)}{p_2N'(p_2)}=\frac{U_0}{L}\,\frac{\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)2\beta}, \tag{323}$$

de unde rezultă

$$i(t)=\frac{U_0}{R}+\frac{U_0}{2L\beta}\left[\frac{\alpha+\beta}{-\alpha+\beta}e^{(-\alpha+\beta)t}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}e^{(-\alpha-\beta)t}\right]. \tag{324}$$

Dacă sîntem în cazul $\beta>0$, mai putem scrie

$$i(t)=\frac{U_0}{R}\left\{1-e^{-\alpha t}\left[\operatorname{ch}\beta t+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\operatorname{sh}\beta t\right]\right\}, \quad t\geqslant 0. \tag{325}$$

Dacă $\beta=j\omega$, expresia funcției $i=i(t)$ este

$$i(t)=\frac{U_0}{R}\left\{1-e^{-\alpha t}\left[\cos\omega t+\frac{\alpha^2-\omega^2}{2\alpha\omega}\sin\omega t\right]\right\}, \quad t\geqslant 0. \tag{326}$$

Altă aplicație a calculului operațional o întîlnim la rezolvarea sistemelor diferențiale liniare cu coeficienți constanți. care în scrierea matricială au forma

$$y'(t)=Ay(t)+f(t), \quad t\geqslant 0. \tag{327}$$

în care $A=(a_{ij})$ este o matrice constantă de tipul $n\times n$, iar y și f sînt vectori de tipul $n\times 1$. Scris pe larg, acesta revine la

$$\begin{aligned}
y_1'(t)&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n+f_1(t)\\
y_2'(t)&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n+f_2(t)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n'(t)&=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n+f_n(t).
\end{aligned} \tag{328}$$

Vom presupune că $f_k=f_k(t)$ sînt funcții original. Despre soluția sistemului, care satisface condițiile inițiale:

$$y_1(0)=\alpha_1,\ y_2(0)=\alpha_2,\ \ldots,\ y_n(0)=\alpha_n, \tag{329}$$

unde α_k, $k=\overline{1,n}$ sînt niște constante fixate, se arată că este unică și formată numai din funcții original. Notînd

$$y_k(t)\leftrightarrow Y_k(p), \quad k=\overline{1,n}, \tag{330}$$

avem, desigur, relațiile

$$y_k'(t)\leftrightarrow pY_k(p)-\alpha_k, \quad k=\overline{1,n} \tag{331}$$

și luînd în ambii membri ai ecuațiilor (328) transformata Laplace. obținem sistemul algebric

$$pY_k(p)-\alpha_k=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}Y_i(p)+F_k(p), \quad k=\overline{1,n}, \tag{332}$$

dacă bineînțeles, notăm prin $F_k(p)$ imaginea funcției $f_k(t)$. Acest sistem poate fi scris sub forma echivalentă

$$\begin{aligned}
&(p-a_{11})Y_1-a_{12}Y_2-\ldots-a_{1n}Y_n=\alpha_1+F_1(p)\\
&-a_{21}Y_1+(p-a_{22})Y_2-\ldots-a_{2n}Y_n=\alpha_2+F_2(p)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-a_{n1}Y_1-a_{n2}Y_2-\ldots+(p-a_{nn})Y_n=\alpha_n+F_n(p).
\end{aligned} \tag{333}$$

și dacă notăm cu $P(p)=det\,(pE-A)$ polinomul caracteristic al matricii A, obținem din (333) imaginile funcțiilor necunoscute

$$Y_k(p)=\frac{Q_k(p)}{P(p)}, \quad \operatorname{Re}p>c_0, \quad k=\overline{1,n}, \tag{334}$$

de unde, în mod evident, găsim

$$y_k(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}e^{pt}\frac{Q_k(p)}{P(p)}\,dp, \quad x>c_0, \tag{335}$$

numărătorii fracțiilor (334) fiind, desigur, niște expresii cunoscute. Prin c_0 am notat un număr real suficient de mare, astfel că în semiplanul $\operatorname{Re} p > c_0$ imaginile $Y_k(p)$ sînt olomorfe. Dacă imaginile (334) sînt fracții raționale, aflarea originalelor poate fi considerată o problemă rezolvată. Se poate folosi și procedeul descompunerii în fracții simple.

Exemplu. Să se afle soluția problemei

$$x'(t) = -2x - y + \sin t$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \tag{336}$$

$$y'(t) = 4x + 2y + \cos t$$

Rezolvare. Notăm imaginea lui $x(t)$ cu $X(p)$ și a lui $y(t)$ cu $Y(p)$; imaginea lui $x'(t)$ va fi atunci $pX(p)$, iar a lui $y'(t)$ va fi $pY(p) - 1$. Sistemul algebric (333) devine în acest caz concret

$$(p+2)X + Y = \frac{1}{p^2+1} \tag{337}$$

$$-4X + (p-2)Y = 1 + \frac{p}{p^2+1}$$

și are soluția

$$X(p) = \frac{-p^2-3}{p^2(p^2+1)}, \qquad Y(p) = \frac{p^3+3p^2+3p+6}{p^2(p^2+1)}. \tag{338}$$

Se găsește imediat descompunerea

$$X(p) = \frac{-3}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}, \qquad Y(p) = \frac{6}{p^2} + \frac{3}{p} - \frac{2p+3}{p^2+1}, \tag{339}$$

iar soluția căutată este

$$x(t) = -3t + 2\sin t, \quad y(t) = 6t + 3 - 2\cos t - 3\sin t. \tag{340}$$

Exercițiu. Să se afle soluția problemei

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y + z \\ y'(t) &= z + 2e^{-t} \\ z'(t) &= -x + z \end{aligned} \qquad x(0) = z(0) = 0, \ y(0) = \frac{1}{2}. \tag{341}$$

Se poate spune că, în ipoteza că imaginile (334) sînt fracții raționale, toată dificultatea problemei (328)+(329) constă în rezolvarea sistemului algebric (333). Aceasta înseamnă în fond că s-a redus rezolvarea unui sistem diferențial la rezolvarea unui sistem algebric, care în general este mai simplă.

Dacă imaginile (334) nu sînt fracții raționale și nu se găsesc în tabelele uzuale care conțin transformatele Laplace ale diverselor funcții, problema găsirii efective a soluției devine considerabil mai complicată decît în cazul precedent, deoarece trebuie calculate integralele (335).

În rezumat, putem spune că pentru sistemele liniare (327) avem pînă în prezent două metode de rezolvare și anume cea bazată pe găsirea matricii fundamentale e^{At}, discutată pe larg în primul capitol și metoda operațională expusă în rîndurile precedente.

Se poate pune acum problema cum trebuie să procedăm, dacă imaginile $F_k(p)$ ale „termenilor liberi" $f_k(t)$ nu sînt cunoscute toate. În acest scop vom face din nou apel la scrierea matricială (327) și ne vom aminti că soluția problemei

$$y'(t) = Ay(t) + f(t), \qquad y(0) = y^0 \tag{342}$$

este dată prin formula

$$y(t) = e^{At}y^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau, \qquad t \geqslant 0. \tag{343}$$

Dacă vom afla matricea fundamentală $exp\,(At)$, problema poate fi considerată rezolvată, în expresia soluției $y = y(t)$ apărînd și integrale de tipul „produs de convoluție", așa cum se vede clar din formula precedentă. Să indicăm un mod în care putem ajunge la matricea $exp(At)$, folosind noțiunea de transformată Laplace. Dacă păstrăm notațiile introduse în primul capitol, ne amintim că

$$(pE - A)^{-1} = \frac{B(p)}{P(p)} = \frac{C(p)}{\psi(p)} = \tag{344}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{Z_{k1}}{p-p_k} + \frac{1!Z_{k2}}{(p-p_k)^2} + \ldots + \frac{(m_k-1)!Z_{k,m_k}}{(p-p_k)^{m_k}} \right].$$

unde $P(p) = (p-p_1)^{m_1} \ldots (p-p_s)^{m_s}$ este polinomul caracteristic al matricii A, $B(p)$ și $C(p)$ sînt matricea asociată și respectiv

matricea asociată redusă a lui A, iar Z_{kl} sînt componentele matriciale ale lui A. Luînd în (344) contraimaginea element cu element, găsim că originalul matricii $(pE-A)^{-1}$ este matricea

$$\sum_{k=1}^{s} [e^{p_k t} Z_{k_1} + te^{p_k t} Z_{k2} + \ldots + t^{m_k-1} e^{p_k t} Z_{k,m_k}], \tag{345}$$

adică matricea $exp(At)$. Prin urmare, avem voie să scriem

$$e^{At} \leftrightarrow (pE-A)^{-1}, \tag{346}$$

dacă prin transformata unei matrici înțelegem matricea formată cu imaginile elementelor ei. De aici rezultă încă un mod de a obține matricea e^{At} și anume: scriem pentru $(pE-A)^{-1}$ descompunerea în fracții simple (344) și bazați pe faptul că matricile componente Z_{kl} sînt constante, scriem originalul folosind și formula de bază

$$t^n e^{\lambda t} \leftrightarrow \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, \quad n=\text{întreg} \geqslant 0, \ \lambda=\text{const.} \tag{347}$$

Exemplu. Să se scrie soluția problemei

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y + \frac{1}{1+t} \\ & \qquad x(0)=y(0)=0, \\ \dot{y}(t) &= x + \frac{1}{1+t^2} \end{aligned} \tag{348}$$

Rezolvare. Sîntem în cazul cînd imaginile termenilor liberi nu sînt cunoscute. În cazul de față

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{At}=\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}. \tag{349}$$

Din (343) rezultă că soluția căutată este dată de

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{\cos(t-\tau)}{1+\tau}\,d\tau - \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{1+\tau^2}\,d\tau \\ & \qquad (350) \\ y(t) &= \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{1+\tau}\,d\tau + \int_0^t \frac{\cos(t-\tau)}{1+\tau^2}\,d\tau. \end{aligned}$$

Observație. În legătură cu problema (342) se poate introduce și transformata Laplace a unui vector variabil. Vom nota cu $Y(p)$ vectorul de tipul $n\times 1$, al cărui componente sînt imaginile $Y_k(p)$ ale funcțiilor necunoscute $y_k(t)$, $k=\overline{1, n}$. Cu alte cuvinte

$$Y^T=[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]. \tag{351}$$

De asemenea, vom nota cu $F(p)$ vectorul imagine, ale cărei componente sînt imaginile funcțiilor $f_k(t)$. Cu aceste precizări, sistemul (342) conduce la relația

$$pY(p)-y^0=AY(p)+F(p), \tag{352}$$

din care se obține că

$$Y(p)=(pE-A)^{-1}(y^0+F(p)). \tag{353}$$

Este evident acum că dacă ținem seamă de (346) și de faptul că produsul a două imagini corespunde produsului de convoluție al originalelor, din (353) regăsim formula cunoscută (343) și anume

$$y(t)=e^{At}y^0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau, \quad t\geqslant 0.$$

Tot în legătură cu aplicațiile transformatei Laplace la studiul sistemelor liniare, se înscrie și așa-numita problemă a „matricii de transfer". Să considerăm sistemul

$$\dot{y}=Ay+Bu, \tag{354}$$

în care A și B sînt matrici constante de tipul $n\times n$ și respectiv $n\times m$, y și u sînt vectori de tipul $n\times 1$ și respectiv $m\times 1$. Vectorul u se numește mărime de intrare sau vector de control, iar componentele sale $u_1, u_2, \ldots, u_m$ se numesc funcții de control. Ele depind de asemenea de variabila t, ca și componentele vectorului necunoscut y. În general, se presupune că aceste funcții pot fi alese arbitrar dintr-o anumită clasă. Este evident că soluția $y=y(t)$ este influențată de alegerea vectorului $u=u(t)$. Odată cu sistemul liniar (354) considerăm și o mărime de ieșire, care poate fi măsurată, notată $z=z(t)$. Desigur, aceasta poate fi și o funcție scalară, dar în cazul cel mai general, putem considera că

$$z(t)=Cy(t)+Du(t), \tag{355}$$

în care C și D sînt matrici constante de tipul $r\times n$ și $r\times m$ respectiv, astfel că mărimea de ieșire este un vector de tipul $r\times 1$. În cazul particular $r=1$, $z(t)$ este o funcție scalară.

Ne interesează cum depinde mărimea de ieșire de mărimea de intrare, în ipoteza că mișcarea descrisă de sistemul (354) pornește de la date inițiale nule, ceea ce înseamnă că $y(0)=0$. Luînd transformata Laplace în (354) și (355), obținem ușor răspunsul la această întrebare, deoarece putem scrie

$$pY(p)=AY(p)+BU(p),\quad Z(p)=CY(p)+DU(p) \tag{356}$$

și eliminînd vectorul imagine $Y(p)$, găsim

$$Z(p)=[C(pE-A)^{-1}B+D]U(p)=G(p)U(p). \tag{357}$$

Definiția 2.1. Matricea $G(p)$ de tipul $r\times m$, dată de relația

$$G(p)=C(pE-A)^{-1}B+D \tag{358}$$

se numește matricea de transfer a sistemului (354) relativ la mărimea de ieșire (355).

Din (357) se vede că imaginea vectorului de ieșire este egală cu produsul dintre matricea de transfer și imaginea vectorului de intrare. Să vedem ce interpretare putem da elementelor $G_{ij}(p)$ ale matricii de transfer. În acest scop, să luăm un vector $u(t)$, dat prin

$$u^T=[0,\ 0,\ \ldots,\ \underset{j}{1},\ \ldots,\ 0], \tag{359}$$

cu alte cuvinte acest vector are toate componentele nule, în afară de cea de rang j, care este egală cu 1. În această situație obținem din (357) că

$$Z_i(p)=G_{ij}(p)\frac{1}{p},\quad i=\overline{1,\ r}, \tag{360}$$

care s-ar putea traduce în cuvinte astfel: pentru un j fixat ($j=\overline{1,\ m}$), coloana de rang j din matricea de transfer, împărțită la p, ne dă imaginea vectorului de ieșire corespunzător vectorului de intrare (359). Pentru o pereche $(i,\ j)$ de indici fixați ($i=\overline{1,\ r}$, $j=\overline{1,\ m}$), putem spune că $G_{ij}(p)/p$ este imaginea celei de a i^a componentă a vectorului de ieșire corespunzător vectorului de intrare care are a j^a componentă egală cu 1 și toate celelalte egale cu 0.

În cazul $D=0$, se poate vedea că elementele matricii $G(p)$ sînt fracții raționale în variabila p, pentru care gradul numărătorului este mai mic decît cel al numitorului, după cum se vede ușor din (358). Dacă notăm în acest caz cu $g(t)$ originalul matricii $G(p)$, din (357) decurge că

$$z(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau,\quad t\geqslant 0, \tag{361}$$

care pe larg poate fi scrisă în felul următor

$$z_i(t)=\int_0^t g_{i1}(t-\tau)u_1(\tau)\,d\tau+\int_0^t g_{i2}(t-\tau)u_2(\tau)\,d\tau+ \tag{362}$$

$$+\ \ldots\ +\int_0^t g_{im}(t-\tau)u_m(\tau)\,d\tau,$$

pentru $i=1,\ 2,\ \ldots,\ r$. În ipoteza $D=0$ la care ne-am referit, tot din (358) se poate găsi și expresia matricii $g(t)$,

$$g(t)=Ce^{At}B, \tag{363}$$

care ne oferă în același timp și un mod de calculare a ei.

Exemplu. Să se afle matricea de transfer și originalul ei, pentru sistemul

$$\begin{aligned}&\dot{y}_1=2y_1+y_2+u_1-u_2 && z_1=y_1-y_2\\ &\dot{y}_2=3y_1+4y_2+u_2 && z_2=-2y_1+y_2.\end{aligned} \tag{364}$$

Rezolvare. Cu notațiile din text, avem în acest caz

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix},\quad D=0. \tag{365}$$

Putem proceda în două moduri: a) aflăm $G(p)$ folosind formula (358) și apoi căutăm originalul $g(t)$; b) aflăm $g(t)$ folosind formula (363) și apoi căutăm imaginea ei $G(p)$. Să aplicăm prima metodă:

$$(pE-A)^{-1}=\frac{1}{P(p)}\begin{bmatrix}p-4 & 1\\ 3 & p-2\end{bmatrix},\quad P(p)=(p-1)(p-5), \tag{366}$$

deci

$$G(p)=\frac{1}{P(p)}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p-4 & 1\\ 3 & p-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{367}$$

Efectuînd înmulțirile, ajungem la concluzia că

$$G(p)=\frac{1}{(p-1)(p-5)}\begin{bmatrix}p-7 & -2p+10\\ -2p+11 & 3p-15\end{bmatrix}. \tag{368}$$

Descompunînd elementele acestei matrici în fracții simple și luînd originalele, găsim și expresia lui $g(t)$

$$g(t)=\begin{bmatrix}2e^t-\frac{1}{2}e^{5t} & -2e^t\\ -\frac{9}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{5t} & 3e^t\end{bmatrix}. \tag{369}$$

Dacă $D\neq 0$, elementele matricii $G(p)$ nu mai sînt funcții imagine în sensul clasic al definiției. Dacă am putea lărgi clasa funcțiilor original cu noi elemente (acestea vor fi distribuțiile), am găsi că în acest caz $g(t)$ este dat de

$$g(t)=Ce^{At}B+D\,\delta(t), \tag{370}$$

unde $\delta(t)$ este distribuția lui Dirac, despre care vom vorbi în secțiunea următoare 2.3. Se va demonstra că transformata Laplace a acestei distribuții este 1, astfel că distribuția (370) este în adevăr originalul matricii de transfer $G(p)$.

Rezolvarea ecuațiilor și sistemelor de ecuații integrale Volterra. Vom considera mai întîi ecuația funcțională

$$y(t)=f(t)+\int_0^t k(t-\tau)y(\tau)\,d\tau,\quad t\geqslant 0, \tag{371}$$

unde f și k sînt funcții original continui date. În aceste condiții, se poate arăta că soluția $y=y(t)$ despre care se știe că este unică și continuă pe $t\geqslant 0$, este de asemenea o funcție original. Aplicînd transformata Laplace ambilor membri ai ecuației (371) și notînd imaginile lui $y(t)$, $f(t)$ și $k(t)$ cu $Y(p)$, $F(p)$ și respectiv $K(p)$, obținem

$$Y(p)=F(p)+K(p)Y(p)\quad\text{sau}\quad Y(p)=\frac{F(p)}{1-K(p)}. \tag{372}$$

De aici rezultă în primul rînd că o expresie de forma $F(p)/1-K(p)$ este transformata unei funcții original (este o imagine) și în al doilea rînd că soluția ecuației (371) este dată pentru $t\geqslant 0$ de

$$y(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}e^{pt}\frac{F(p)}{1-K(p)}\,dp,\quad x>c_0, \tag{373}$$

unde c_0 este exponentul de creștere al soluției căutate. Dacă imaginea $Y(p)$ este o fracție rațională în variabila p, se poate folosi metoda descompunerii în fracții simple.

Exemplu. Să se rezolve ecuația integrală

$$y(t)=t+2\int_0^t\cos(t-\tau)y(\tau)\,d\tau,\quad t\geqslant 0. \tag{374}$$

Rezolvare. În cazul de față avem

$$Y(p)=\frac{1}{p^2}+2\frac{p}{p^2+1}Y(p)\quad\text{sau}\quad Y(p)=\frac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}. \tag{375}$$

Descompunînd în fracții simple, găsim

$$Y(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{p}+\frac{2}{(p-1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}, \tag{376}$$

de unde, conform relației (100), găsim soluția căutată

$$y(t)=t+\frac{1}{2}+2te^t-\frac{1}{2}e^t. \tag{377}$$

Funcția găsită aici satisface ecuația (374) pentru orice t real și chiar mai mult, pentru orice t complex (aceasta se explică prin forma cu totul particulară a ecuației date).

Ecuația (371) se numește ecuație integrală Volterra de speța a doua. Putem vorbi despre „nucleul rezolvant" al acestei ecuații. Anume, dacă scriem imaginea soluției în forma

$$Y(p)=F(p)+\frac{K(p)}{1-K(p)}F(p)=F(p)+R(p)F(p), \tag{378}$$

unde $R(p)=K(p)/(1-K(p))$, atunci soluția $y(t)$ este dată de

$$y(t)=f(t)+\int_0^t r(t-s)f(s)ds,\quad t\geqslant 0, \tag{379}$$

unde $r=r(t)$ este originalul funcției $R(p)$. Expresia $r(t-s)$ se numește nucleul rezolvant el ecuației (371), în timp ce $k(t-s)$ se numește nucleul ecuației date. Din cele spuse mai sus, rezultă și faptul că funcția $r=r(t)$ cu care construim nucleul rezolvant, satisface la rîndul ei ecuația integrală

$$r(t)=k(t)+\int_0^t k(t-s)r(s)\,ds,\quad t\geqslant 0. \tag{380}$$

Prin metoda operațională putem rezolva și sisteme de ecuații integrale Volterra de speța a doua; esența procedeului va consta din nou în reducerea unui astfel de sistem la unul liniar algebric. Sistemul

$$\begin{aligned}
y_1(t)&=f_1(t)+\int_0^t k_{11}(t-s)y_1(s)\,ds+\ldots+\int_0^t k_{1n}(t-s)y_n(s)\,ds\\
y_2(t)&=f_2(t)+\int_0^t k_{21}(t-s)y_1(s)\,ds+\ldots+\int_0^t k_{2n}(t-s)y_n(s)\,ds \qquad (381)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n(t)&=f_n(t)+\int_0^t k_{n1}(t-s)y_1(s)\,ds+\ldots+\int_0^t k_{nn}(t-s)y_n(s)\,ds
\end{aligned}$$

sau în scriere prescurtată

$$y_i(t)=f_i(t)+\sum_{m=1}^{n}\int_0^t k_{im}(t-s)y_m(s)\,ds,\quad t\geqslant 0,\quad i=\overline{1,\ n}, \tag{382}$$

în care funcțiile original $f_i(t)$ și $k_{im}(t)$ sînt continui pentru $t\geqslant 0$, are soluție unică $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$ formată de asemenea din funcții original. Nu vom demonstra această afirmație, bine cunoscută în teoria ecuațiilor integrale, ci vom arăta numai cum se rezolvă practic sistemul (381). Notînd imaginile funcțiilor necunoscute cu $Y_1(p)$, $Y_2(p)$, ..., $Y_n(p)$ obținem sistemul algebric

$$\begin{aligned}
&(1-K_{11}(p))Y_1-K_{12}(p)Y_2-\ldots-K_{1n}(p)Y_n=F_1(p)\\
&-K_{21}(p)Y_1+(1-K_{22}(p))Y_2-\ldots-K_{2n}(p)Y_n=F_2(p) \qquad (383)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-K_{n1}(p)Y_1-K_{n2}(p)Y_2-\ldots+(1-K_{nn}(p))Y_n=F_n(p),
\end{aligned}$$

dacă prin $F_i(p)$ notăm imaginea lui $f_i(t)$, iar prin $K_{im}(p)$ notăm imaginea lui $k_{im}(t)$. Din (383) se determină în mod unic imaginile $Y_i(p)$, $i=\overline{1,\ n}$ și apoi se află originalele $y_i(t)$, $i=\overline{1,\ n}$.

Exemplu. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned}
x(t)&=2t-\int_0^t (t-s)x(s)\,ds+\int_0^t y(s)\,ds\\
y(t)&=-2-4\int_0^t x(s)\,ds+3\int_0^t (t-s)y(s)\,ds.
\end{aligned} \qquad t\geqslant 0. \tag{384}$$

Rezolvare. Funcțiile necunoscute sînt $x=x(t)$ și $y=y(t)$. Notînd imaginile lor cu $X(p)$ și $Y(p)$, obținem din (384) sistemul

$$\begin{aligned}
X(p)&=\frac{2}{p^3}-\frac{1}{p^2}X(p)+\frac{1}{p}Y(p)\\
Y(p)&=-\frac{2}{p^3}-\frac{4}{p^3}X(p)+\frac{3}{p^2}Y(p),
\end{aligned} \tag{385}$$

care are soluția (unică)

$$X(p)=\frac{p-6}{(p^2-1)(p^2+3)},\qquad Y(p)=\frac{-2p(p^2+5)}{(p^2-1)(p^2+3)}. \tag{386}$$

Deoarece rezultă descompunerea

$$\begin{aligned}
X(p)&=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{p^2+3},\\
Y(p)&=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)+\frac{p}{p^2+3},
\end{aligned} \tag{387}$$

găsim imediat soluția sistemului (384) și anume

$$\begin{aligned}
x(t)&=-\frac{3}{4}(e^t-e^{-t})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t,\\
y(t)&=-\frac{3}{2}(e^t+e^{-t})+\cos\sqrt{3}t.
\end{aligned} \tag{388}$$

Observația 1. Sistemul (381) poate fi scris și în forma matricială

$$y(t)=f(t)+\int_0^t k(t-s)y(s)\,ds, \quad t\geq 0, \tag{389}$$

dacă notăm cu y vectorul de tipul $n\times 1$ având componentele $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Prin $f=f(t)$ am notat, desigur, un vector de același tip având componentele $f_1, f_2, \ldots, f_n$ iar prin $k(t)=(k_{ij}(t))$ am notat matricea pătrată de tipul $n\times n$ formată cu funcțiile nucleu $k_{ij}(t)$. Sistemul algebric (383) poate fi scris matricial astfel

$$(E-K(p))Y(p)=F(p), \tag{390}$$

unde, evident, E este matricea unitate de tipul $n\times n$, iar $K(p)$ este o matrice de același tip având elementele $K_{ij}(p)$, cu alte cuvinte este imaginea lui $k(t)$. Notațiile Y și F au mai fost folosite. Soluția acestui sistem matricial este

$$Y(p)=(E-K(p))^{-1}F(p). \tag{391}$$

Observația 2. După cum s-a putut vedea, pentru ca rezolvarea sistemului (381) să fie efectivă, am presupus că imaginile funcțiilor $f_i(t)$ și $k_{ij}(t)$ sînt cunoscute. Același lucru se poate spune și relativ la ecuația (371). Se poate pune întrebarea ce se întîmplă dacă nucleul ecuației are imaginea cunoscută, dar termenul liber $f(t)$ are imaginea necunoscută. În acest caz, putem face apel la formula (380) și rezultatul va conține și o integrală de tip produs de convoluție.

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$y(t)=\operatorname{arctg} t+\int_0^t \sin(t-s)y(s)\,ds, \quad t\geq 0. \tag{392}$$

Constatăm că $f(t)=\operatorname{arctg} t$ deși este o funcție original, nu are imaginea cunoscută. Aici $k(t)=\sin t$ și deci $K(p)=1/(p^2+1)$; nucleul rezolvant are imaginea $R(p)=K(p)/(1-K(p))=1/p^2$, deci $r(t)=t$. Din (380) rezultă că soluția căutată este

$$y(t)=\operatorname{arctg} t+\int_0^t (t-s)\operatorname{arctg} s\,ds \tag{393}$$

și deoarece în acest caz integrala din dreapta se poate calcula, soluția se va exprima ca o sumă de funcții elementare.

Să trecem la integrarea unei ecuații de forma

$$\int_0^t k(t-s)y(s)\,ds=f(t), \quad t\geq 0, \tag{394}$$

în care $k=k(t)$ și $f=f(t)$ sînt funcții continui date, iar $y=y(t)$ este funcția necunoscută. Vom presupune că f și k sînt funcții original și vom observa imediat că o astfel de ecuație, numită de tip Volterra și de speța întîi, nu are totdeauna soluție în clasa originalelor. În adevăr, dacă notăm cu $K(p)$, $Y(p)$ și $F(p)$ imaginile celor trei funcții din ecuația (394), găsim

$$Y(p)=\frac{F(p)}{K(p)}, \tag{395}$$

ori, raportul a două imagini nu este totdeauna o funcție imagine, după cum ne putem ușor convinge printr-un exemplu. Dacă însă $F(p)/K(p)$ este imaginea unei funcții original $y=y(t)$, atunci este clar că aceasta reprezintă o soluție a ecuației (394). Ea este unică în clasa originalelor, dacă așa cum am mai spus, nu facem distincție între funcții care diferă numai într-un număr finit de puncte.

Exemplu. Să se rezolve ecuația integrală

$$\int_0^t \sin(t-s)y(s)\,ds=\sin^2 t, \quad t\geq 0. \tag{396}$$

Rezolvare. Scriind că

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}\leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}=\frac{2}{p(p^2+4)}, \tag{397}$$

găsim din (396) că

$$\frac{1}{p^2+1}Y(p)=\frac{2}{p(p^2+4)} \text{ sau } Y(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p}+\frac{3}{2}\frac{p}{p^2+4}, \tag{398}$$

de unde rezultă că soluția ecuației (396) este funcția

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t. \tag{399}$$

Dacă admitem că funcțiile $k=k(t)$ și $f=f(t)$ din ecuația (394) au derivată continuă pentru $t\geqslant 0$, iar $k(0)\neq 0$, prin derivarea ecuației (394) se obține

$$k(0)y(t)+\int_0^t k'(t-s)y(s)\mathrm{d}s=f'(t),\ t\geqslant 0, \tag{400}$$

care este o ecuație liniară Volterra de speța a doua, avînd după cum se știe, soluție unică $y=y(t)$. Aceasta nu ne va spune însă că $y=y(t)$ verifică în mod obligatoriu și ecuația de speța întîi (394), ci ne spune doar că dacă ecuația (394) are soluție continuă $y=y(t)$, aceasta nu poate fi decît soluția ecuației (400), obținută din ea prin derivare.

Dacă admitem că $f=f(t)$ și $k=k(t)$ au derivată continuă pînă la ordinul $n+1$ inclusiv și $k(0)=k'(0)=\ldots=k^{(n-1)}(0)=0$ iar $k^{(n)}(0)\neq 0$ atunci, derivînd ecuația (394) de $n+1$ ori, obținem ecuația Volterra de speța a doua

$$k^{(n)}(0)y(t)+\int_0^t k^{(n+1)}(t-s)y(s)\mathrm{d}s=f^{(n+1)}(t),\ t\geqslant 0, \tag{401}$$

dar, ca și în cazul $n=0$, este valabilă aceeași observație și anume, că ecuațiile (394) și (401) nu sînt echivalente, însă dacă prima admite soluție, aceasta nu poate fi decît soluția celei de a doua.

În sfîrșit, ca o ultimă aplicație a calculului operațional să arătăm cum poate fi rezolvată ecuația cu derivate parțiale, cu date inițiale și condiții la limită

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=B\sin\frac{n\pi x}{l},\ 0\leqslant x\leqslant l$$

$$u(0,\ t)=u(l,\ t)=0,\ t\geqslant 0. \tag{402}$$

Acesta este unul din cele mai simple cazuri de rezolvarea ecuației undelor, deoarece ecuația este omogenă, condițiile la limită sînt nule, iar condițiile inițiale nu se reprezintă prin funcții complicate. Din punct de vedere fizic, ecuația precedentă descrie oscilațiile unei bare elastice, fixate la capete ($x=0$ și $x=l$). Valoarea $u(x,\ t)$ reprezintă elongația în punctul de abscisă x și la momentul t.

Notînd imaginea soluției $u(x,\ t)$ cu $U(x,\ p)$, unde x joacă rolul unui parametru, vom mai observa că

$$u_t(x,\ t)\leftrightarrow pU(x,\ p),\ u_{tt}(x,\ t)\leftrightarrow p^2U(x,\ p)-B\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$u_x(x,\ t)\leftrightarrow U_x(x,\ p),\ u_{xx}(x,\ t)\leftrightarrow U_{xx}(x,\ p). \tag{403}$$

Ajungem astfel la ecuația

$$U_{xx}(x,\ p)-\frac{p^2}{a^2}U(x,\ p)=-\frac{B}{a^2}\sin\frac{n\pi x}{l},\ 0<x<l, \tag{404}$$

cu condițiile la limită $U(0,\ p)=U(l,\ p)=0$. În ecuația precedentă considerăm x ca variabilă independentă și p ca un parametru. Soluția generală a lui (404) este

$$U(x,\ p)=c_1(p)e^{-(p/a)x}+c_2(p)e^{(p/a)x}+\frac{B}{p^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{405}$$

dar ținînd seama de condițiile la limită, rezultă imediat $c_1=c_2=0$. Prin urmare, imaginea soluției căutate este

$$U(x,\ p)=\frac{B}{p^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{406}$$

de unde găsim că problema (402) este verificată de funcția

$$u(x,\ t)=\frac{Bl}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},\ t\geqslant 0,\ 0\leqslant x\leqslant l. \tag{407}$$

2.3. NOȚIUNI DE TEORIA DISTRIBUȚIILOR

Necesitatea extinderii clasei funcțiilor original s-a putut vedea și cu ocazia definirii matricii de transfer a unei probleme de forma (354)+(355). Numeroase alte probleme cu caracter aplicativ au impus introducerea unei noțiuni care să o generalizeze pe aceea

de funcție. Se poate spune că introducerea distribuțiilor s-a datorat unor probleme concrete de fizică și electrotehnică, fundamentarea riguroasă a conceptelor folosite fiind făcută mai tîrziu. Primii fizicieni care au folosit distribuțiile au fost Dirac și Heaviside, iar primii matematicieni care s-au ocupat de aceste probleme au fost Sobolev și Laurent Schwarz. Mai tîrziu, teoria matematică a distribuțiilor s-a dezvoltat foarte mult, devenind o parte a teoriei ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale. La început, matematicienii sovietici Sobolev, Ghelfand și Șilov foloseau pentru distribuție denumirea de „funcție generalizată". Ulterior, termenul „distribuție" s-a impus tot mai mult și a înlocuit vechea denumire de „funcție generalizată".

În teoria distribuțiilor se obține un grad mai mare de generalitate decît în cadrul teoriei clasice a ecuațiilor diferențiale; de exemplu, fiecare distribuție are derivate de orice ordin. Apoi, unele ecuații diferențiale care nu ar avea soluție în sens clasic își găsesc în mod firesc rezolvarea în acest cadru mai general. Ne vom mărgini la prezentarea distribuțiilor de o singură variabilă, numite și unidimensionale, deoarece acestea sînt cel mai des întîlnite. Cazul general, adică al distribuțiilor de mai multe variabile, nu prezintă totuși deosebiri esențiale față de cel considerat aici.

Distribuțiile vor fi funcționale liniare continui definite pe anumite spații de funcții. Un astfel de spațiu, ale cărei elemente sînt funcții cu o anumită proprietate, se va numi spațiu fundamental. Elementele unui spațiu fundamental se mai numesc uneori și funcții-test.

Fie $\varphi=\varphi(t)$ o funcție cu valori complexe, definită pe axa reală. Vom numi suport al acestei funcții, notat supp φ, închiderea mulțimii punctelor pentru care $\varphi(t)\neq 0$. Se mai poate spune că suportul unei funcții este cea mai mică mulțime închisă, în afara căreia funcția se anulează. Din cele spuse, reiese că oricare ar fi funcția φ, supp φ este totdeauna o mulțime închisă. Complementara lui supp φ este cea mai mare mulțime deschisă pe care funcția φ se anulează. De exemplu, pentru $\varphi=\varphi(t)$ care ia valoarea 1 pentru $t\in(0, 1)$, în rest fiind egală cu 0, supp φ coincide cu segmentul închis $[0,1]$. Dacă supp φ este mărginit, se mai spune că funcția are suport compact.

Definiția 2.2. Vom nota cu $\mathcal{D}$ spațiul fundamental, constînd din toate funcțiile $\varphi=\varphi(t)$ definite pe axa reală, avînd derivate de orice ordin (infinit derivabile) și suport compact.

Exemplu. Pentru funcția

$$\varphi(t)=\begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}}, & |t|<1 \\ 0, & |t|\geqslant 1, \end{cases} \tag{408}$$

avem dreptul să scriem $\varphi\in\mathcal{D}$.

Vom numi funcțională pe $\mathcal{D}$, o aplicație (funcție) care pune în corespondență fiecărei funcții-test un număr complex sau real. Dacă notăm această funcțională cu T, valoarea ei corespunzătoare funcției φ se notează cu simbolul $T(\varphi)$ sau (T, φ).

O funcțională T se numește liniară, dacă

$$(T, \varphi_1+\varphi_2)=(T, \varphi_1)+(T, \varphi_2) \text{ și } (T, \lambda\varphi)=\lambda(T, \varphi), \tag{409}$$

oricare ar fi φ_1, φ_2, $\varphi\in\mathcal{D}$ și oricare ar fi λ complex.

Vom introduce o topologie în $\mathcal{D}$ astfel: vom spune că șirul de funcții-test (φ_n) converge în $\mathcal{D}$ la funcția-test φ, dacă:

a) există un compact K cu proprietatea

$$\operatorname{supp}\varphi_n\subset K,\ n=1, 2, \ldots \tag{410}$$

b) șirul $(\varphi_n^{(k)}(t))$ converge uniform pe R (axa reală) la $\varphi^{(k)}(t)$, oricare ar fi $k=0, 1, 2, \ldots$

Cu alte cuvinte, șirul (φ_n) converge la φ în $\mathcal{D}$, dacă există un compact K care include toate suporturile elementelor șirului și în plus, pe acest compact șirul converge uniform la φ, șirul derivatelor de ordinul întîi converge uniform la $\varphi'(t)$, șirul derivatelor secunde converge uniform la $\varphi''(t)$ etc. Se vede de aici că noțiunea de convergență în $\mathcal{D}$ este foarte restrictivă sau altfel spus, există puține șiruri convergente în $\mathcal{D}$.

Vom spune că funcționala T este continuă pe $\mathcal{D}$, dacă

$$\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi \text{ implică } (T, \varphi_n)\to(T, \varphi). \tag{411}$$

Cu alte cuvinte, T este continuă dacă din afirmația „(φ_n) converge la φ în $\mathcal{D}$" rezultă că șirul numeric (T, φ_n) converge la (T, φ). Se înțelege că relația precedentă trebuie să aibă loc pentru orice șir convergent în $\mathcal{D}$, nu numai pentru anumite șiruri, pentru a putea spune că T este continuă pe $\mathcal{D}$, sau mai pe scurt, continuă.

Definiția 2.3. O funcțională liniară și continuă pe $\mathcal{D}$ se numește distribuție pe $\mathcal{D}$ sau mai pe scurt, distribuție.

Suma a două distribuţii se defineşte în mod uzual şi este tot o distribuţie. Aceasta înseamnă că dacă T_1 şi T_2 sînt distribuţii, suma T_1+T_2 se dă prin relaţia $(T_1+T_2, \varphi)=(T_1, \varphi)+(T_2, \varphi)$ pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}$. Produsul unei distribuţii cu o constantă se defineşte prin relaţia $(cT, \varphi)=c(T, \varphi)$ pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}$.

Exemplul 1. Dacă fiecărei funcţii-test $\varphi=\varphi(t)$ îi atribuim valoarea ei în punctul $t=0$, obţinem o distribuţie δ, numită distribuţia lui Dirac. Prin urmare

$$(\delta, \varphi)=\varphi(0), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}. \tag{412}$$

Tot astfel, dacă a este un număr real fixat, putem defini o distribuţie δ_a, prin relaţia

$$(\delta_a, \varphi)=\varphi(a), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}. \tag{413}$$

Exemplul 2. Dacă $f=f(t)$ este o funcţie local integrabilă în sens Lebesgue, definită pe axa reală, definim o distribuţie, notată tot cu f, prin condiţia

$$(f, \varphi)=\int_R f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}. \tag{414}$$

Evident că integrala este convergentă, deoarece φ se anulează în afara unui interval finit, astfel că numai aparent avem o integrală generalizată în partea dreaptă a egalităţii (414). Se poate verifica imediat că prin formula (414) am definit o funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{D}$, adică o distribuţie.

În particular, orice funcţie continuă sau cu un număr finit de discontinuităţi de speţa întîi pe orice interval finit va genera o distribuţie sau altfel spus, va fi asimilată cu o distribuţie.

Fie $\Omega\subset R$ o mulţime deschisă. Vom spune că distribuţia T se anulează pe Ω dacă are loc condiţia

$$(T, \varphi)=0, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D} \text{ cu supp } \varphi\subset\Omega. \tag{415}$$

Definiţia 2.4. Vom numi suportul unei distribuţii T, cea mai mică mulţime închisă în afara căreia T se anulează. Vom nota cu supp T suportul distribuţiei T.

În cazul lui δ, supp $\delta=\{0\}$, adică suportul constă numai dintr-un singur punct. La fel pentru δ_a, avem supp $\delta_a=\{a\}$. Se poate uşor vedea că dacă distribuţia este de tip funcţie, adică este generată de o funcţie local integrabilă, atunci suportul distribuţiei coincide cu suportul funcţiei care o generează. Există cazuri cînd suportul nu este o mulţime mărginită; pentru funcţia unitate $\theta(t)$ dată de relaţia (10), supp $\theta=[0, +\infty)$. Acelaşi lucru se poate spune despre distribuţia generată de ea, notată de asemenea cu θ şi numită distribuţia lui Heaviside. Pentru funcţia (distribuţia) $f(t)=e^t$, ca să luăm numai un singur exemplu, suportul coincide cu mulţimea numerelor reale, adică cu R. Mulţimea distribuţiilor cu suport compact sau, ceea ce este echivalent, cu suport mărginit, va juca un rol important în cele ce urmează.

Dacă $f=f(t)$ este o funcţie cu derivată continuă, distribuţia generată de derivata f' satisface egalităţile

$$(f', \varphi)=\int_R f'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\left[f(t)\varphi(t)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_R f(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t, \tag{416}$$

oricare ar fi funcţia-test φ. Deoarece φ se anulează pentru $|t|$ suficient de mare, rezultă că

$$(f', \varphi)=-(f, \varphi'), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}. \tag{417}$$

Aceasta ne sugerează că dacă T este o distribuţie oarecare, trebuie să definim derivata ei prin relaţia

$$(T', \varphi)=-(T, \varphi'), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}. \tag{418}$$

Se poate verifica uşor că funcţionala T' dată de (418) este în adevăr o distribuţie. Dar aceasta ne va duce la concluzia că există derivată de orice ordin. Pentru derivata a doua avem

$$(T'', \varphi)=-(T', \varphi')=(T, \varphi''), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D} \tag{419}$$

şi mai general, putem scrie

$$(T^{(n)}, \varphi)=(-1)^n(T, \varphi^{(n)}), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D} \tag{420}$$

pentru orice număr natural n.

După cum se vede din (417), dacă o funcţie are derivată continuă, atunci derivata distribuţiei generate de ea coincide cu distribuţia generată de derivata funcţiei. Să admitem acum că funcţia $f=f(t)$ şi derivatele sale au discontinuităţi de speţa întîi în origine, iar în rest sînt continui peste tot. Notînd cu f' derivata distribuţiei f, avem

$$(f', \varphi)=-\int_R f(t)\varphi'(t)=-\int_0^{\infty} f(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{0} f(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{421}$$

și integrînd prin părți în dreapta, găsim

$$(422) \qquad (f',\ \varphi)=\sigma_0\varphi(0)+\int_R f'(t)\varphi(t)\,dt,\quad \forall\varphi\in\mathcal{D},$$

unde $\sigma_0=f(0+)-f(0-)$ este saltul funcției $f=f(t)$ în origine. Dacă notăm prin $\{f'\}$ distribuția generată de derivata $f'(t)$, relația precedentă poate fi transcrisă în forma

$$(423) \qquad f'=\{f'\}+\sigma_0\delta,\quad \delta=\text{distribuția lui Dirac},$$

care arată că în acest caz, derivata distribuției nu mai coincide cu distribuția generată de derivată. Pentru derivatele de ordin superior, vom avea, aplicînd regula precedentă

$$(424) \qquad f''=\{f''\}+\sigma_1\delta+\sigma_0\delta'$$

și mai general

$$(425) \qquad f^{(n)}=\{f^{(n)}\}+\sigma_{n-1}\delta+\sigma_{n-2}\delta'+\ldots+\sigma_0\delta^{(n-1)},$$

unde $\sigma_k=f^{(k)}(0+)-f^{(k)}(0-)$ este saltul derivatei $f^{(k)}(t)$ în origine, $k=\overline{0,\ n-1}$ iar $\delta^{(k)}$ este derivata de ordinul k a distribuției Dirac, adică

$$(426) \quad (\delta^{(k)},\ \varphi)=(-1)^k(\delta,\ \varphi^{(k)})=(-1)^k\varphi^{(k)}(0),\ k=\overline{0,\ n-1}.$$

Exercițiul 1. Să se afle derivata distribuției lui Heaviside θ. Dacă aplicăm definiția, avem

$$(427) \qquad (\theta',\ \varphi)=-(\theta,\ \varphi')=-\int_0^\infty\varphi'(t)dt=\varphi(0)=(\delta,\ \varphi),$$

pentru orice funcție-test φ. Aceasta înseamnă că

$$(428) \qquad \theta'=\delta.$$

Același lucru se obținea dacă aplicam formula (423). Pentru distribuția generată de funcția $\theta(t)\cos t$, găsim din (423) că

$$(429) \qquad (\theta(t)\cos t)'=-\theta(t)\sin t+\delta.$$

Dacă aplicăm (424), obținem pentru derivata a doua

$$(430) \qquad (\theta(t)\cos t)''=-\theta(t)\cos t+\delta',$$

unde bineînțeles este vorba de derivata în sens distribuțional.

Exercițiul 2. Să se afle derivata distribuției generate de funcția local integrabilă $f(t)=\ln|t|,\ t\neq 0$.

Aplicînd definiția, vom găsi

$$(431) \quad (\ln|t|)',\ \varphi)=-(\ln|t|,\ \varphi')=-\int_0^\infty\varphi'(t)\ln t\,dt-\int_{-\infty}^0\varphi'(t)\ln|t|\,dt,$$

pentru orice funcție-test φ. Integrînd prin părți, vom putea scrie că

$$(432) \quad (\ln|t|)',\ \varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty\frac{\varphi(t)}{t}\,dt+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right).$$

Deoarece pentru un φ fixat, avem

$$(433) \qquad (\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon=A(\varepsilon)\varepsilon\ln\varepsilon,\ A(\varepsilon)=\text{mărginit},$$

rezultă că prima limită din partea dreaptă a relației (432) este zero. Apoi, este evident că dacă $\varphi(0)\neq 0$, funcția $\varphi(t)/t$ nu este integrabilă pe nici un interval conținînd originea. În acest caz se definește „valoarea principală" notată vp a acestei integrale, prin relația

$$(434) \qquad vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty\frac{\varphi(t)}{t}\,dt+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right).$$

După cum se vede din (432), această relație definește o distribuție pe care o vom nota $vp(1/t)$. Mai precis

$$(435) \qquad \left(vp\frac{1}{t},\ \varphi(t)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty\frac{\varphi(t)}{t}\,dt+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right),$$

pentru orice funcție-test $\varphi=\varphi(t)$. Prin urmare, putem transcrie (432) în forma

$$(436) \qquad (\ln|t|)',\ \varphi)=\left(vp\frac{1}{t},\ \varphi\right),\quad \forall\varphi\in\mathcal{D},$$

ceea ce înseamnă că

$$(437) \qquad (\ln|t|)'=vp\frac{1}{t},$$

derivata fiind luată în sensul teoriei distribuțiilor.

Exercițiul 3. În ipoteza că $f=f(t)$ și derivatele sale au discontinuitate de speța întîi în punctul a, iar în rest sînt continui, să se arate că

$$f^{(n)}=\{f^{(n)}\}+\sigma_{n-1}\delta_a+\sigma_{n-2}\delta'_a+\ldots+\sigma_0\delta_a^{(n-1)}, \tag{438}$$

unde σ_k este saltul derivatei de ordinul k în punctul $t=a$, iar δ_a este distribuția dată de relația (413).

Dacă f este o distribuție tip funcție, adică în fond este o funcție local integrabilă (nu este necesar să fie definită pe toată axa reală; se prelungește cu 0 în afara domeniului de definiție), iar $\alpha=\alpha(t)$ este o funcție avînd derivate de orice ordin pe axa reală, atunci evident că produsul αf este local integrabil și deci generează o nouă distribuție. În acest caz

$$(\alpha f,\ \varphi)=\int_R \alpha(t)f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_R f(t)\alpha(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=(f,\ \alpha\varphi), \tag{439}$$

oricare ar fi $\varphi\in\mathcal{D}$. Aceasta ne conduce la ideea că dacă T este o distribuție oarecare, iar $\alpha=\alpha(t)$ este o funcție avînd derivate de orice ordin pe toată axa, să definim distribuția αT prin relația

$$(\alpha T,\ \varphi)=(T,\ \alpha\varphi),\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}. \tag{440}$$

Bineînțeles, trebuie justificat că formula precedentă definește în adevăr o distribuție. Mai întîi observăm că $\alpha\varphi$ este de asemenea o funcție test, deci expresia $(T,\ \alpha\varphi)$ are sens. Mai mult, relațiile

$$(\alpha T,\ \varphi_1+\varphi_2)=(\alpha T,\ \varphi_1)+(\alpha T,\ \varphi_2)\ \text{și}\ (\alpha T,\ \lambda\varphi)=\lambda(\alpha T,\ \varphi), \tag{441}$$

oricare ar fi φ_1, φ_2 și $\varphi\in\mathcal{D}$ și oricare ar fi λ complex, sînt banale dacă se ține seama de proprietățile lui T. A mai rămas de arătat continuitatea. Dacă observăm că din

$$\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi\ \text{rezultă}\ \alpha\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\alpha\varphi, \tag{442}$$

putem spune că

$$\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi\ \text{implică}\ (\alpha T,\ \varphi_n)\to(\alpha T,\ \varphi), \tag{443}$$

dacă ținem seama de (440) și de continuitatea lui T. Dar relația precedentă arată tocmai continuitatea lui αT. În rezumat, putem spune că am definit produsul unei distribuții cu o funcție infinit derivabilă, și acest produs este o nouă distribuție.

Exemplu. Fie $\alpha=\alpha(t)$ infinit derivabilă pe axa reală și δ_a distribuția dată de (413). În acest caz

$$(\alpha\delta_a,\ \varphi)=(\delta_a,\ \alpha\varphi)=\alpha(a)\varphi(a)=(\alpha(a)\delta_a,\ \varphi), \tag{444}$$

pentru orice funcție-test φ. Deci $\alpha\delta_a=\alpha(a)\delta_a$, adică înmulțirea lui δ_a cu o funcție are același efect ca și înmulțirea cu o constantă. În particular $(t-a)\delta_a=0$, unde 0 este distribuția identic nulă, adică $(0,\ \varphi)=0$ pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}$.

Se poate demonstra următoarea afirmație: condiția necesară și suficientă ca o distribuție să satisfacă condiția $(t-a)T=0$ este ca $T=c\delta_a$, unde c este o constantă.

Teorema 2.23. *Dacă T este o distribuție, iar $\alpha=\alpha(t)$ este o funcție infinit derivabilă, atunci are loc formula*

$$(\alpha T)^{(n)}=\alpha^{(n)}T+C_n^1\alpha^{(n-1)}T'+\ldots+C_n^k\alpha^{(n-k)}T^{(k)}+\ldots+\alpha T^{(n)} \tag{445}$$

oricare ar fi numărul natural n.

Demonstrație. Se procedează la fel ca în cazul regulei lui Leibniz pentru derivata de ordinul n a unui produs de funcții. Să o verificăm pentru $n=1$. Avem

$$((\alpha T)',\ \varphi)=-(\alpha T,\ \varphi')=-(T,\ \alpha\varphi')=-(T,\ (\alpha\varphi)'-\alpha'\varphi), \tag{446}$$

de unde se deduce mai departe că

$$((\alpha T)',\ \varphi)=(\alpha T',\ \varphi)+(\alpha' T,\ \varphi)=(\alpha' T+\alpha T',\ \varphi), \tag{447}$$

pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}$. Aceasta înseamnă că avem

$$(\alpha T)'=\alpha' T+\alpha T'. \tag{448}$$

În continuare se aplică inducția completă: presupunînd formula adevărată pentru un k natural, se arată pe baza regulei (448) și a proprietăților elementare ale combinărilor, că ea este adevărată și pentru numărul $k+1$. De aici se trage concluzia că (445) este adevărată pentru orice n natural, Q.E.D.

Exemplul 1. Să se arate că

$$\delta+t\delta'=0,\ 2\delta+4t\delta'+t^2\delta''=0. \tag{449}$$

În adevăr, dacă derivăm egalitatea $t\delta=0$ obținem prima relație, iar dacă derivăm de două ori egalitatea $t^2\delta=0$, o obținem pe cea de a doua.

Exemplul 2. Să se afle derivata distribuției $t\theta$, unde θ este distribuția lui Heaviside.

Aplicînd regula de derivare (448) și ținînd seama că $\theta'=\delta$ găsim

$$(t\theta)'=\theta+t\theta'=\theta+t\delta=\theta, \tag{450}$$

cu alte cuvinte $t\theta$ este primitiva lui θ. Mai general, găsim

$$(t^n\theta)^{(n)}=n!\theta, \quad n=\text{natural}, \tag{451}$$

prin derivarea repetată a distribuției $t^n\theta$ și ținînd seama că $\theta'=\delta$, $t^k\delta=0$ pentru orice $k=$natural.

Exemplul 3. Derivînd de n ori egalitatea $t\delta=0$, să se obțină relația

$$t^n\delta^{(n)}=(-1)^n n!\delta, \quad n=\text{natural}. \tag{452}$$

În adevăr, dacă aplicăm formula (445) vom găsi

$$t\delta^{(n)}+n\delta^{(n-1)}=0 \text{ sau } t\delta^{(n)}=-n\delta^{(n-1)}. \tag{453}$$

Dacă înmulțim ultima egalitate cu t, găsim

$$t^2\delta^{(n)}=-nt\delta^{(n-1)}=-n(-1)(n-1)\delta^{(n-2)}=n(n-1)\delta^{(n-2)}. \tag{454}$$

Repetînd procedeul, adică înmulțind relația obținută cu t și ținînd din nou seama de a doua relație din (453), găsim în final

$$t^n\delta^{(n)}=(-1)^n n!\delta. \tag{455}$$

Să revenim la distribuțiile cu suport compact, pentru a pune în evidență o proprietate importantă a lor și anume aceea că ele pot fi privite ca funcționale liniare continui, definite pe un spațiu de funcții mai amplu decît $\mathcal{D}$. Acest nou spațiu va consta din toate funcțiile infinit derivabile pe axă reală.

Definiția 2.5. Vom nota cu $\mathcal{E}$ spațiul fundamental constînd din toate funcțiile infinit derivabile $\varphi=\varphi(t)$, definite pe axa reală.

Vom introduce o topologie în $\mathcal{E}$ astfel: vom spune că șirul (φ_n) de funcții din $\mathcal{E}$ converge la $\varphi\in\mathcal{E}$, dacă șirul $(\varphi_n^{(k)}(t))$ converge uniform pe orice compact la $\varphi^{(k)}(t)$, oricare ar fi $k=0, 1, 2, \ldots$. Vom nota aceasta prin simbolul

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi. \tag{456}$$

Convergența unui șir în topologia spațiului $\mathcal{E}$ se poate reda în cuvinte și astfel: pe orice compact $K\subset R$, șirul (φ_n) converge uniform la φ, șirul derivatelor de ordinul întîi (φ_n') converge uniform la φ', șirul derivatelor secunde (φ_n'') converge uniform la φ'', etc.

Este evidentă incluziunea topologică

$$\mathcal{D}\subset\mathcal{E}, \tag{457}$$

care spune nu numai că orice element al primului spațiu face parte și din al doilea spațiu, ci mai mult chiar: dacă (φ_n) este un șir convergent în prima topologie, el este convergent la aceeași limită și în a doua topologie.

Să arătăm acum că o distribuție T cu suport compact K poate fi prelungită la o funcțională liniară continuă pe $\mathcal{E}$. Dacă φ este un element oarecare din $\mathcal{E}$, nu putem să-i aplicăm funcționala T și de aceea luăm o funcție $\alpha=\alpha(t)\in\mathcal{D}$ care ia valoarea 1 pe compactul K. Se poate arăta că există o infinitate de funcții cu această proprietate. Funcția $\alpha\varphi$ face parte acum din $\mathcal{D}$ și deci $(T, \alpha\varphi)$ are sens. Fixînd funcția $\alpha=\alpha(t)$ despre care am vorbit, vom defini o funcțională L pe spațiul $\mathcal{E}$ prin relația

$$(L, \varphi)=(T, \alpha\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{E}. \tag{458}$$

Mai întîi trebuie să arătăm că dacă $\beta=\beta(t)\in\mathcal{D}$ este o altă funcție care ia valoarea 1 pe K, atunci $(T, \beta\varphi)=(T, \alpha\varphi)$ pentru orice $\varphi\in\mathcal{E}$, ceea ce ne va asigura că definiția (458) este corectă. În adevăr

$$(T, \beta\varphi)-(T, \alpha\varphi)=(T, (\beta-\alpha)\varphi)=0, \tag{459}$$

deoarece funcția $(\beta-\alpha)\varphi$ se anulează pe K, deci are suportul în afara lui K și T se anulează pentru orice funcție care are suportul în complementara lui K. Apoi, este cu totul evident că

$$(L, \varphi_1+\varphi_2)=(L, \varphi_1)+(L, \varphi_2), \quad (L, \lambda\varphi)=\lambda(L, \varphi), \tag{460}$$

pentru orice φ_1, φ_2, $\varphi\in\mathcal{E}$ și orice λ complex. În fine, dacă

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi \text{ atunci } \alpha\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \alpha\varphi \tag{461}$$

și din continuitatea lui T, rezultă și continuitatea lui L, ca funcțională definită pe $\mathcal{E}$.

Reciproc, să arătăm acum că restricția la $\mathcal{D}$ a unei funcționale liniare continui pe $\mathcal{E}$ este o distribuție cu suport compact. Dacă notăm cu L funcționala pe $\mathcal{E}$, atunci punînd

$$(T, \varphi)=(L, \varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}, \tag{462}$$

este clar că T va fi o distribuție. Trebuie să arătăm că are suportul compact. Presupunem că acest suport nu e compact; atunci, oricare ar fi n=natural, există funcții care au suportul în afara intervalului $[-n, n]$, pentru care T nu se anulează. Luăm o astfel de funcție $\varphi_n \in \mathcal{D}$, pentru care $(T, \varphi_n)=1$. Pe orice compact al dreptei reale, $\varphi_n=0$ pentru toți n suficient de mari. Aceasta înseamnă că

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0 \quad \text{și deci} \quad (L, \varphi_n) \longrightarrow 0, \tag{463}$$

deoarece L este continuă pe $\mathcal{E}$. Dar aceasta vine în contradicție cu $(L, \varphi_n)=1$ pentru toți n și deci ipoteza că supp T nu este compact a fost falsă. Rezultă deci supp $T=K=$compact.

Pentru a arăta că de fapt există o corespondență biunivocă între mulțimea distribuțiilor cu suport compact și cea a funcționalelor liniare continui pe $\mathcal{E}$, trebuie să mai arătăm că prelungind la $\mathcal{E}$ distribuția T definită de (462), găsim funcționala L de la care am plecat. Dacă notăm cu L_1 prelungirea distribuției T, avem

$$(L_1, \varphi)=(T, \alpha\varphi), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{E}, \tag{464}$$

unde α este o funcție din $\mathcal{D}$, care ia valoarea 1 pe K. Luăm acum un șir (α_n) de elemente din $\mathcal{D}$ cu proprietatea

$$\alpha_n(t)=1 \text{ dacă } |t|<n, \quad \alpha_n(t)=0 \text{ dacă } |t|>2n. \tag{465}$$

Dacă φ este un element fixat din $\mathcal{E}$, din (464) deducem că $(L_1, \varphi)=(T, \alpha_n\varphi)$ pentru toți n suficient de mari. Pe de altă parte, se vede că șirul $(\alpha_n\varphi)$ converge la φ în topologia lui $\mathcal{E}$, deoarece dacă K_1 este un compact fixat pe dreapta reală, avem $\alpha_n\varphi=\varphi$ dacă n este suficient de mare. Din continuitatea lui L, tragem concluzia că $(L, \alpha_n\varphi) \to (L, \varphi)$. Din (462) deducem atunci că și $(T, \alpha_n\varphi) \to (L, \varphi)$. În concluzie, $(L_1, \varphi)=(L, \varphi)$ și deoarece φ a fost arbitrar, rezultă $L_1=L$.

Dacă identificăm distribuțiile cu suport compact cu prelungirile lor la spațiul fundamental $\mathcal{E}$ și ținem seama că mulțimea funcționalelor liniare continui pe un spațiu vectorial topologic formează un alt spațiu vectorial, numit dualul primului, putem enunța următoarea

Teorema 2.24. *Dualul spațiului fundamental $\mathcal{E}$, notat $\mathcal{E}'$, constă din mulțimea distribuțiilor cu suport compact.*

Dacă notăm cu $\mathcal{D}'$ dualul lui $\mathcal{D}$, ținînd seama de Definiția 2.3, rezultă că $\mathcal{D}'$ coincide cu mulțimea tuturor distribuțiilor unidimensionale. Avem incluziunile

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{E}, \qquad \mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'. \tag{466}$$

Pentru distribuțiile cu suport compact se poate defini transformata Laplace, prin analogie cu situația din cazul funcțiilor original. Dacă $T \in \mathcal{E}'$, are sens expresia (T, e^{-pt}) unde p este un număr complex oarecare, deoarece funcția de variabilă reală $\varphi(t)=e^{-pt}$ face parte din spațiul fundamental $\mathcal{E}$. Dacă facem notația provizorie $F(p)=(T, e^{-pt})$, se poate arăta că $F(p)$ este o funcție olomorfă în tot planul complex finit, adică este o funcție întreagă. În adevăr, fie p=fixat și $p_n \to p$, unde (p_n) este un șir de numere complexe. Putem scrie

$$\frac{F(p_n)-F(p)}{p_n-p} - (T, -te^{-pt}) = (T, \varphi_n(t)) \text{ cu } \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0, \tag{467}$$

unde φ_n este dat de

$$\varphi_n(t)=\frac{e^{-p_n t}-e^{-pt}}{p_n-p} - (-te^{-pt}), \quad n=1, 2, \ldots \tag{468}$$

În baza continuității lui T, din (467) se deduce $(T, \varphi_n) \to 0$ și aceasta duce la concluzia că $F=F(p)$ este derivabilă în p și $F'(p)=(T, -te^{-pt})$. Deoarece p=complex a fost luat arbitrar, rezultă că $F=F(p)$ este olomorfă în tot planul. Totodată, a rezultat și regula

$$T \leftrightarrow F(p) \text{ implică } -tT \leftrightarrow F'(p), \tag{469}$$

iar prin repetarea ei, găsim

$$(-1)^n t^n T \leftrightarrow F^{(n)}(p), \qquad \forall p=\text{complex}. \tag{470}$$

Pentru distribuția lui Dirac avem $(\delta, e^{-pt})=1$, ceea ce ne dă dreptul să scriem

$$\delta \leftrightarrow 1. \tag{471}$$

Pentru derivata ei δ', avem $(\delta', e^{-pt})=-(\delta, -pe^{-pt})=p$. Mai general, pentru $\delta^{(n)}$ putem scrie

$$\delta^{(n)} \leftrightarrow p^n, \qquad \forall p=\text{complex}, \tag{472}$$

oricare ar fi n=natural, ceea ce ne arată acum că și polinoamele sînt imaginile anumitor originale, numai că aceste originale sînt distribuții și nu funcții.

Pentru distribuția δ_a avem $(\delta_a, e^{-pt})=e^{-ap}$, ceea ce se traduce prin relația:

$$\delta_a \leftrightarrow e^{-ap}, \tag{473}$$

iar pentru derivatele ei găsim

$$\delta_a^{(n)} \leftrightarrow p^n e^{-ap}, \quad \text{unde } n=1, 2, \ldots \tag{474}$$

Asimilînd funcțiile original cu distribuțiile pe care le generează și adăugînd și clasa distribuțiilor cu suport compact, constatăm că apare ceva supărător și anume faptul că transformata Laplace nu se definește într-o manieră unitară pentru funcții și distribuții. În adevăr, funcțiile original nu sînt distribuții cu suport compact (decît în cazuri particulare) și astfel dacă $f=f(t)$ este o astfel de funcție, nu putem spune că $F(p)=(f, e^{-pt})$, deoarece această expresie nu are sens, funcția $\varphi(t)=exp(-pt)$ nefiind din $\mathcal{D}$. Se impune deci aprofundarea noțiunii de transformată Laplace și definirea ei într-un mod unitar pentru toată clasa de distribuții considerate. Aceasta va fi clasa distribuțiilor temperate, dar despre aceasta vom vorbi mai tîrziu, deoarece mai sînt necesare unele chestiuni preliminare.

Dacă $f=f(t)$ și $g=g(t)$ sînt două funcții original, am definit produsul lor de convoluție prin formula (76) și am văzut că aceasta este tot o funcție original. Dacă ne referim la distribuția generată de produsul $f*g$, vom avea

$$(f*g, \varphi)=\int_R \varphi(t)\mathrm{d}t \int_R g(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_R f(\tau)\mathrm{d}\tau \int_R g(u)\varphi(\tau+u)\mathrm{d}u. \tag{475}$$

Dacă în loc de τ vom nota cu t variabila de integrare în formula precedentă, putem scrie că

$$(f*g, \varphi)=\int_R f(t)\mathrm{d}t \int_R g(u)\varphi(t+u)\mathrm{d}u, \tag{476}$$

pentru orice funcție φ din spațiul fundamental $\mathcal{D}$. Aceasta ne duce la ideea că dacă S și T sînt două distribuții, să definim produsul lor de convoluție $S*T$ prin formula

$$(S*T, \varphi)=(S(t), (T(u), \varphi(t+u))), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \tag{477}$$

unde prin $(T(u), \varphi(t+u))=\psi(t)$ am înțeles funcția care se obține aplicînd distribuția T funcției $\varphi(t+u)$, considerată ca depinzînd numai de variabila u. Cu alte cuvinte, cînd se aplică T acestei funcții, t se consideră constant și are rolul unui parametru. Funcției $\psi=\psi(t)$ astfel găsite, i se aplică distribuția S și astfel, în mod formal deocamdată, putem spune că (477) definește o funcțională liniară pe spațiul de funcții $\mathcal{D}$. Se pune acum întrebarea care sînt condițiile precise cînd funcționala $S*T$ este corect definită și reprezintă în adevăr o distribuție.

Teorema 2.25. *Dacă măcar una din distribuțiile S și T are suportul compact, atunci $S*T$ definit de* (477) *este o distribuție și în plus*

$$S*T=T*S. \tag{478}$$

Demonstrație. Să presupunem că supp T=compact. În acest caz, funcția $\psi(t)=(T(u), \varphi(t+u))$ aparține spațiului fundamental $\mathcal{D}$, deoarece ea are derivate de orice ordin, date de

$$\psi^{(n)}(t)=(T(u), \varphi^{(n)}(t+u)), \quad n=\text{natural}, \tag{479}$$

după cum se poate ușor constata. Mai mult, funcția ψ are suportul compact și

$$\text{supp } \psi \subset \overline{\text{supp } \varphi - \text{supp } T}. \tag{480}$$

În adevăr, dacă luăm un număr t care nu este de forma $t=v-u$ cu $v \in$ supp φ și $u \in$ supp T, atunci $t+u$ nu va cădea în suportul lui φ cînd u parcurge mulțimea supp T. Aceasta înseamnă că dacă notăm provizoriu $h(u)=\varphi(t+u)$, avem $h(u)=0$ pentru $u \in$ supp T și atunci $(T(u), h(u))=(T, h)=0$. Prin urmare am arătat că $\psi=\psi(t)$ se anulează în afara mulțimii supp φ − supp T, ceea ce înseamnă că (480) este adevărată. În particular, rezultă că supp ψ este mărginit, deci compact. Revenind la (477), găsim că $(S*T, \varphi)=(S, \psi)$ are sens și reprezintă în mod evident o funcțională liniară pe $\mathcal{D}$, deoarece

$$(S*T, \varphi_1+\varphi_2)=(S*T, \varphi_1)+(S*T, \varphi_2), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}, \tag{481}$$

iar proprietatea factorului constant este la fel de transparentă. Pentru a arăta că $S*T$ este în adevăr o distribuție, a mai rămas de justificat continuitatea. Se poate arăta că

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \text{ implică } \psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi, \tag{482}$$

unde bineînțeles am păstrat notația $\psi_n(t)=(T(u),\ \varphi_n(t+u))$. Deoarece S este continuă pe $\mathcal{D}$, avem $(S,\ \psi_n)\to(S,\ \psi)$ ceea ce ne spune că

(483) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ implică $(S*T,\ \varphi_n)\to(S*T,\ \varphi)$.

Deci produsul de convoluție $S*T$ este în acest caz o distribuție. Să ne referim acum la produsul $T*S$. Notînd de data aceasta $\psi(t)=(S(u),\ \varphi(t+u))$, vom observa că ψ aparține spațiului fundamental $\mathcal{E}$, deoarece este infinit derivabilă pe axa reală. Distribuția T avînd suportul compact, are sens expresia $(T(t),\ \psi(t))=(T,\ \psi)$. Așadar, de data aceasta vom găsi $(T*S,\ \varphi)=(T,\ \psi)$ pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}$ și asemănător cu cazul precedent se arată că funcționala $T*S$ este liniară și continuă pe $\mathcal{D}$, adică este o distribuție. Se poate arăta și egalitatea (478), deci putem socoti demonstrația terminată.

Este interesant de precizat, în condițiile teoremei precedente, ce se poate spune despre suportul produsului $S*T$. Răspunsul este dat de

Teorema 2.26. *Dacă măcar una din distribuțiile S și T are suportul compact și*

(488) supp $S\subset A$, supp $T\subset B$ *atunci* supp $S*T\subset\overline{A+B}$.

Demonstrație. Prin $\overline{A+B}$ am notat închiderea mulțimii $A+B$. Să luăm o funcție $\varphi\in\mathcal{D}$, care are suportul în afara mulțimii $\overline{A+B}$ și să arătăm că $(S*T,\ \varphi)=0$. Să notăm provizoriu supp $\varphi=K$; am admis deci că $K\cap\overline{A+B}=\Phi=$mulțimea vidă. Pentru $t\in A$ avem

(484) $t+B\subset\overline{A+B}$, deci $(t+B)\cap K=\Phi$

și aceasta antrenează $h(u)=\varphi(t+u)=0$ cînd u parcurge mulțimea B, în care se află suportul lui T. Deoarece $h=h(u)$ se anulează pe o mulțime care conține suportul distribuției T, înseamnă că supp h este în afara lui supp T și deci

(485) $\psi(t)=(T(u),\ \varphi(t+u))=0$.

Prin urmare, pentru $t\in A$ avem $\psi(t)=0$ și deci suportul lui ψ este în afara mulțimii A, ceea ce implică $(S,\ \psi)=0$. Ținînd seama de modul cum s-a definit produsul $S*T$, a rezultat că

(486) $(S*T,\ \varphi)=0$ dacă supp $\varphi\cap\overline{A+B}=\Phi$,

ceea ce atrage

(487) supp $S*T\subset\overline{A+B}$

și demonstrația este terminată.

Corolar 1. Dacă ambele distribuții S și T au suportul compact, rezultă că $S*T$ are suportul compact. Mai mult, dacă supp $S=[a,\ b]$ și supp $T=[c,\ d]$, atunci suportul convoluției $S*T$ coincide cu intervalul compact $[a+c,\ b+d]$. Aceasta se aplică și pentru distribuțiile de tip funcție local integrabilă, care au suportul compact.

Corolar 2. Dacă au loc incluziunile

(488) supp $S\subset[a,\ \infty)$ supp $T\subset[b,\ \infty)$,

atunci în mod evident

(489) supp $S*T\subset[a+b,\ \infty)$.

În particular, dacă ambele distribuții au suportul pe semiaxa $t\geqslant 0$, produsul $S*T$ va avea aceeași proprietate.

Corolar 3. Dacă cel puțin două din distribuțiile R, S și T au suportul compact, atunci are loc egalitatea

(490) $R*(S*T)=(R*S)*T$.

Ținînd seama și de comutativitatea produsului de convoluție, rezultă că în cazul considerat oricare ar fi ordinea factorilor și oricum am face asocierea lor, obținem aceeași distribuție, pe care avem dreptul să o notăm $R*S*T$.

Exemple. Oricare ar fi distribuția T, are loc egalitatea

(491) $\delta*T=T$,

care ne spune că distribuția lui Dirac are rolul de element neutru (unitate) față de operația produs de convoluție. În adevăr

(492) $(\delta*T,\ \varphi)=(T(t),\ (\delta(u),\ \varphi(t+u)))=(T(t),\ \varphi(t))=(T,\ \varphi)$,

oricare ar fi funcția $\varphi\in\mathcal{D}$, ceea ce este echivalent cu (491).

Oricare ar fi distribuția T, are loc egalitatea

(493) $\delta'*T=T'$.

În adevăr, putem scrie

(494) $(\delta'*T,\ \varphi)=(T(t),\ (\delta'(u),\ \varphi(t+u)))=(T(t),\ -\varphi'(t))=(T',\ \varphi)$,

pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, ceea ce este echivalent cu (493). Mai general

$$\delta^{(n)} * T = T^{(n)}, \qquad \forall n = \text{natural}, \tag{495}$$

egalitate care se justifică la fel ca (493), folosind definițiile produsului de convoluție și derivatei unei distribuții.

De asemenea, avem și egalitatea

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}, \tag{496}$$

unde δ_a este distribuția de tip Dirac (413). În adevăr

$$(\delta_a * \delta_b, \varphi) = (\delta_a(t), (\delta_b(u), \varphi(t+u))) = (\delta_a(t), \varphi(t+b)) = \tag{497}$$
$$= \varphi(a+b) = (\delta_{a+b}, \varphi),$$

pentru orice funcție-test φ, ceea ce justifică (496).

Exercițiu. Fie $\alpha = \alpha(t)$ o funcție infinit derivabilă pe R. Dacă măcar una din distribuțiile T și α are suportul compact, atunci $T * \alpha$ este o distribuție de tip funcție (infinit derivabilă). Dacă notăm cu $h = h(t)$ această funcție, atunci

$$h(t) = (T(u), \alpha(t-u)), \quad t = \text{real}. \tag{498}$$

Rezolvare. Să presupunem că $\operatorname{supp} \alpha = K = \text{compact}$. În acest caz, pentru t fixat, funcția $\alpha(t-u)$ considerată ca depinzînd de u este cu suport compact și bineînțeles, infinit derivabilă. Astfel că formula (498) are sens și definește o funcție $h = h(t)$ infinit derivabilă, adică aparținînd spațiului fundamental $\mathcal{E}$. Vom avea

$$(T * \alpha, \varphi) = (T(t), (\alpha(u), \varphi(t+u))) = (T(t), \int_R \alpha(u)\varphi(t+u)\,du) =$$
$$= (T(t), \int_R \varphi(u)\alpha(u-t)\,du), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{499}$$

Se poate demonstra că avem voie să schimbăm ordinea în care aplicăm distribuțiile T și φ funcției $\alpha(u-t)$, astfel că din formula precedentă va rezulta în continuare

$$(T * \alpha, \varphi) = (\varphi(u), (T(t), \alpha(u-t))) = (\varphi(u), h(u)) = (h, \varphi), \tag{500}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$, ceea ce ne spune că $T * \alpha = h$, Q.E.D.

La fel se judecă și în cazul cînd presupunem $\operatorname{supp} T = \text{compact}$, iar $\alpha = \alpha(t)$ o funcție infinit derivabilă pe axa reală, cu suportul oarecare.

Ca o aplicație a celor spuse aici, să arătăm că dacă T este o distribuție cu suportul compact, iar $\alpha = \alpha(t)$ este un polinom de grad $= n$, atunci $T * \alpha$ este un polinom de grad $\leqslant n$. În adevăr, distribuția $T * \alpha$ este generată de polinomul $h = h(t)$, dat de (498). Dar în acest caz

$$\alpha(t-u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \alpha^{(k)}(-u), \tag{501}$$

astfel că

$$h(t) = (T(u), \alpha(t-u)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} (T(u), \alpha^{(k)}(-u)) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k, \tag{502}$$

unde constanta c_k are expresia

$$c_k = \frac{1}{k!} (T(u), \alpha^{(k)}(-u)), \qquad k = \overline{0, n}. \tag{503}$$

Gradul polinomului $h = h(t)$ poate să fie mai mic decît n, deoarece nu este exclus ca $c_n = 0$.

În ceea ce privește derivarea produsului $S * T$, putem enunța

Teorema 2.27. *Dacă S și T sînt două distribuții dintre care măcar una are suportul compact, atunci*

$$(S * T)' = S' * T = S * T'. \tag{504}$$

Demonstrație. Vom avea

$$((S * T)', \varphi) = -(S * T, \varphi') = -(S(t), (T(u), \varphi'(t+u))) =$$
$$= (S(t), (T'(u), \varphi(t+u))) = (S * T', \varphi), \tag{505}$$

pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{D}$, ceea ce este echivalent cu $(S * T)' = S * T'$. Pentru a obține cealaltă relație, scriem

$$((S * T)', \varphi) = -(S * T, \varphi') = -(T(t), (S(u), \varphi'(t+u))) =$$
$$= (T(t), (S'(u), \varphi(t+u))) = (T * S', \varphi), \tag{506}$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, ceea ce ne duce la concluzia $(S * T)' = S' * T$, dacă ținem seama și de comutativitatea convoluției. Este interesant de arătat că (504) poate fi dedusă și altfel, plecînd de la relațiile (490), (491) și (493). În adevăr, putem scrie

$$(S * T)' = \delta' * (S * T) = (\delta' * S) * T = S' * T \tag{507}$$

și desigur, în mod asemănător

$$(S*T)'=(S*T)*\delta'=S*(T*\delta')=S*T'. \tag{508}$$

Derivînd succesiv în (504), vom găsi că

$$(S*T)^{(n)}=S^{(n)}*T=S*T^{(n)}, \tag{509}$$

oricare ar fi $n=$natural. Să luăm din nou operatorul diferențial cu coeficienți constanți

$$D=\frac{d^n}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{d}{dt}+a_n, \quad (a_0=1) \tag{510}$$

pe care l-am întîlnit și cu altă ocazie și să considerăm o distribuție oarecare T. Prin definiție, DT va fi distribuția dată de relația următoare

$$DT=\frac{d^nT}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}T}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dT}{dt}+a_nT, \tag{511}$$

care poate fi scrisă în forma echivalentă

$$DT=T^{(n)}+a_1T^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}T'+a_nT. \tag{512}$$

Ținînd seama de forma (509), precum și de distributivitatea produsului de convoluție față de adunarea distribuțiilor, putem enunța regula de derivare

$$D(S*T)=DS*T=S*DT, \tag{513}$$

în ipoteza subînțeleasă, că măcar una din distribuțiile S și T are suportul compact.

Acum se poate pune problema rezolvării ecuației $DT=f$, în care f este o distribuție dată, în particular o funcție local-integrabilă. În cazul clasic, cînd f este o funcție continuă se știe că problema nu are soluție unică. De accea, vom restrînge clasa distribuțiilor cu care lucrăm, la acelea care au suportul în intervalul $[0, \infty)$. Această clasă se notează eu simbolul $\mathcal{D}'_+$ și se poate demonstra că dacă ne limităm la ea, ecuația $DT=f$ are cel mult o soluție.

Definiția 2.6. Soluția ecuații $DT=\delta$, aparținînd clasei $\mathcal{D}'_+$, se numește soluție fundamentală a operatorului D.

Teorema 2.28. *Pentru operatorul D, definit de* (510), *soluția fundamentală este funcția θz, unde $\theta=\theta(t)$ este funcția lui Heaviside, iar $z=z(t)$ este soluția ecuației $Dz=0$, pentru care*

$$z(0)=z'(0)=\ldots=z^{(n-2)}(0)=0, \quad z^{(n-1)}(0)=1. \tag{514}$$

Demonstrație. Vom calcula derivatele lui θz în sens distribuțional, ținînd seama de regula (438). Dacă notăm provizoriu cu y distribuția θz și cu y', y'' etc. derivatele sale, putem scrie

$$\begin{aligned}
&y=\theta z\\
&y'=\theta z'+z(0+)\,\delta\\
&y''=\theta z''+z'(0+)\,\delta+z(0+)\,\delta'\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n-1)}=\theta z^{(n-1)}+z^{(n-2)}(0+)\,\delta+\ldots+z'(0+)\,\delta^{(n-3)}+\\
&\quad+z(0+)\,\delta^{(n-2)}\\
&y^{(n)}=\theta z^{(n)}+z^{(n-1)}(0+)\,\delta+\ldots+z'(0+)\,\delta^{(n-2)}+z(0+)\,\delta^{(n-1)},
\end{aligned} \tag{515}$$

de unde vom deduce

$$Dy=\theta Dz+z^{(n-1)}(0+)\,\delta=\delta, \tag{516}$$

dacă avem în vedere (514) și faptul că funcția $z=z(t)$ verifică ecuația $Dz=0$. În concluzie, am arătat că $D(\theta z)=\delta$, adică distribuția de tip funcție $\theta z=\theta(t)z(t)$ este soluția fundamentală a operatorului D.

Exemplul 1. Să se afle soluția fundamentală a operatorului

$$D=\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2, \qquad \omega=\text{const.}>0. \tag{517}$$

În acest caz, funcția $z=z(t)$ satisface condițiile

$$z''(t)+\omega^2z(t)=0, \quad z(0)=0, \quad z'(0)=1, \tag{518}$$

adică $z(t)=\sin\omega t/\omega$. Soluția căutată este funcția (distribuția)

$$\theta z=\theta(t)\frac{\sin\omega t}{\omega}. \tag{519}$$

Exemplul 2. Se cere soluția fundamentală a operatorului

$$D=\left(\frac{d}{dt}-\lambda\right)^n=\frac{d^n}{dt^n}-C_n^1\lambda\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+C_n^2\lambda^2\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}+\ldots+(-1)^n\lambda^n. \tag{520}$$

În acest caz, se observă că funcția $z=z(t)$ care satisface ecuația $Dz=0$ și condițiile (514) este $z(t)=t^{n-1}e^{\lambda t}/(n-1)!$, deci soluția căutată este

$$\theta z=\theta(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}. \tag{521}$$

Observație. Pentru aflarea lui $z=z(t)$ se poate folosi metoda operațională. Se mai poate vedea că funcția $z=z(t)$ pe care o căutăm în teorema precedentă, poate fi la fel de bine definită și ca derivata funcției $w=w(t)$ care satisface $Dw=1$ și condițiile inițiale nule: $w(0)=w'(0)=\ldots=w^{(n-1)}(0)=0$.

Aflarea soluției fundamentale a unui operator diferențial D este foarte importantă, după cum se vede și din

Teorema 2.29. *Dacă f este o funcție original sau o distribuție cu suport compact din $\mathcal{D}'_+$, atunci soluția ecuației $DT=f$ în care D este dat de* (510), *este produsul de convoluție dintre soluția fundamentală și f, adică $T=\theta z*f$.*

Demonstrație. Se vede imediat că

$$D(\theta z*f)=D(\theta z)*f=\delta*f=f, \tag{522}$$

adică $T=\theta z*f$ verifică ecuația neliniară $DT=f$. În particular, dacă f este o funcție original, soluția ecuației $Dy=f$, considerată în sens distribuțional, este unică și dată de convoluția

$$(\theta z*f)(t)=\int_0^t z(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t f(t-\tau)z(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad t>0. \tag{523}$$

Să aplicăm această teoremă într-un caz concret. Considerăm problema

$$Lq''(t)+Rq'(t)+\frac{1}{C}\,q(t)=E(t),\ q(0)=q_0,\ q'(0)=i_0, \tag{524}$$

în care funcția necunoscută $q=q(t)$ reprezintă cantitatea de electricitate care trece la momentul t printr-un conductor; L, R și C sînt niște constante, iar funcția $E=E(t)$ este forța electromotoare. În loc de a afla direct funcția $q=q(t)$, considerăm distribuția $y=\theta q$ și vedem la ce ecuație va satisface ea. Odată aflată distribuția de tip funcție $y=y(t)$, $q=q(t)$ se va scrie imediat. Avem

$$y=\theta(t)q(t),\ y'=\theta(t)q'(t)+q_0\delta,\ y''=\theta(t)q''(t)+i_0\delta+q_0\delta', \tag{525}$$

unde bineînțeles, derivatele sînt luate în sens distribuțional. Înmulțind în (525) prima egalitate cu $1/C$, a doua cu R și a treia cu L, vom obține prin sumare, dacă ținem seama și de (524), că distribuția y satisface ecuația

$$y''+\frac{R}{L}\,y'+\frac{1}{LC}\,y=\frac{1}{L}\,\theta(t)E(t)+\left(i_0+\frac{R}{L}\,q_0\right)\delta+q_0\delta'. \tag{526}$$

Pentru a afla soluția fundamentală a operatorului D, dat de

$$Dy=y''+\frac{R}{L}\,y'+\frac{1}{LC}\,y, \tag{527}$$

aflăm funcția $z=z(t)$ care satisface

$$z''+\frac{R}{L}\,z'+\frac{1}{LC}\,z=0,\ z(0)=0,\ z'(0)=1. \tag{528}$$

Dacă facem ipoteza că polinomul caracteristic al acestei ecuații are rădăcinile confundate ($R^2=4L/C$), valoarea comună a acestor rădăcini va fi $-R/2L$ și se vede imediat că dacă notăm $R/2L$ cu α, atunci

$$z(t)=te^{-\alpha t},\quad \theta z=\theta(t)te^{-\alpha t}. \tag{529}$$

Soluția ecuației (526) va fi atunci distribuția

$$y=\frac{1}{L}\,\theta z*\theta E+\left(i_0+\frac{R}{L}\,q_0\right)\theta z*\delta+q_0\theta z*\delta'. \tag{530}$$

Având în vedere că $\theta z*\delta=\theta z$ și $\theta z*\delta'=(\theta z)'=\theta z'+z(0)\,\delta=\theta z''$ putem scrie soluția y în forma

$$y=\frac{1}{L}\,\theta z*\theta E+\left(i_0+\frac{R}{L}\,q_0\right)\theta z+q_0\theta z', \tag{531}$$

de unde rezultă că

$$q(t)=\frac{1}{L}\int_0^t \tau e^{-\alpha\tau}E(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau+\left(i_0+\frac{R}{L}\,q_0\right)te^{-\alpha t}+q_0(1-\alpha t)e^{-\alpha t}, \tag{532}$$

pentru $t\geqslant 0$. Știind că $\alpha=R/2L$, mai putem scrie soluția problemei (524) și în forma echivalentă

$$q(t)=\frac{1}{L}\int_0^t \tau e^{-\alpha\tau}E(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2L}\,e^{-\alpha t}[2Lq_0+(2Li_0+Rq_0)t], \tag{533}$$

pentru $t\geqslant 0$.

Să facem acum ipoteza că polinomul caracteristic al ecuației (528) are rădăcinile reale distincte ($R^2>4L/C$). Acestea vor fi

$$(534)\quad r_1=-\alpha+\beta,\ r_2=-\alpha-\beta \text{ unde } \alpha=\frac{R}{2L},\ \beta=\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}.$$

Nu este greu de văzut că soluția problemei (528) va fi în acest caz

$$(535)\qquad z(t)=\frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t$$

și că formula (531) rămîne valabilă. După înlocuire, vom avea

$$(536)\quad q(t)=\frac{1}{L\beta}\int_0^t e^{-\alpha\tau}\operatorname{sh}\beta\tau E(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\left(i_0+\frac{R}{L}q_0\right)\frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t+$$
$$+q_0\frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}(\beta\operatorname{ch}\beta t-\alpha\operatorname{sh}\beta t),\quad t>0,$$

sau în formă echivalentă

$$(537)\quad q(t)=\frac{1}{L\beta}\int_0^t e^{-\alpha\tau}\operatorname{sh}\beta\tau E(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2L\beta}(2Li_0+Rq_0)e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t+$$
$$+q_0e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\beta t,\quad t>0.$$

În fine, dacă facem ipoteza că polinomul caracteristic al ecuației (528) are rădăcini complexe ($R^2<4L/C$), β din relația (534) este de forma $j\omega$ cu $\omega>0$, iar dacă ținem seama și de egalitățile $\operatorname{ch} z=\cos(z/j)$, $\operatorname{sh} z=j\operatorname{sh}(z/j)$ pentru orice z complex, găsim că în acest caz soluția problemei (524) va fi

$$(538)\quad q(t)=\frac{1}{L\omega}\int_0^t e^{-\alpha\tau}\sin\omega\tau E(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2L\omega}(2Li_0+Rq_0)e^{-\alpha t}\sin\omega t+$$
$$+q_0e^{-\alpha t}\cos\omega t,\quad t>0.$$

O aplicație a teoremei precedente va fi la rezolvarea problemei cunoscute

$$(539)\qquad Dy=f,\ y^{(k)}(0)=\alpha_k,\ k=\overline{0,n-1},$$

în care $f=f(t)$ este o funcție continuă pentru $t>0$, iar α_k sînt constante reale sau complexe. Pentru a retranscrie această ecuație în sens distribuțional, vom nota cu T distribuția necunoscută θy. Ținînd seama de regula de derivare și de condițiile inițiale date, vom avea

$$(540)\qquad \begin{aligned}
&T=\theta y\\
&T'=\theta y'+\alpha_0\delta\\
&T''=\theta y''+\alpha_1\delta+\alpha_0\delta'\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&T^{(n-1)}=\theta y^{(n-1)}+\alpha_{n-2}\delta+\alpha_{n-3}\delta'+\ldots+\alpha_0\delta^{(n-2)}\\
&T^{(n)}=\theta y^{(n)}+\alpha_{n-1}\delta+\alpha_{n-2}\delta'+\ldots+\alpha_0\delta^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Înmulțind în (540) prin egalitate cu a_n, a doua cu a_{n-1} etc. și sumînd egalitățile obținute, vom avea dacă ținem seama și de condiția $Dy=f$, că

$$(541)\qquad DT=f+b_0\delta+b_1\delta'+\ldots+b_{n-1}\delta^{(n-1)},$$

unde este vizibil că s-a folosit notația

$$(542)\qquad \begin{aligned}
b_0&=\alpha_0a_{n-1}+\alpha_1a_{n-2}+\ldots+\alpha_{n-2}a_1+\alpha_{n-1}\\
b_1&=\alpha_0a_{n-2}+\alpha_1a_{n-3}+\ldots+\alpha_{n-3}a_1+\alpha_{n-2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_{n-2}&=\alpha_0a_1+\alpha_1\\
b_{n-1}&=\alpha_0,
\end{aligned}$$

care nu este necesar să fie reținută pe de rost. Păstrînd pentru funcția $z=z(t)$ semnificația știută din cazul general, adică z satisface ecuația $Dz=0$ și condițiile (514), rezultă că

$$(543)\qquad T=\theta z*(f+b_0\delta+b_1\delta'+\ldots+b_{n-1}\delta^{(n-1)}),$$

sau încă

$$(544)\qquad T=\theta z*f+b_0\theta z+b_1(\theta z)'+\ldots+b_{n-1}(\theta z)^{(n-1)}.$$

Ținînd seama de regula (438) de derivare a distribuțiilor și de condițiile inițiale (514), găsim $(\theta z)^{(k)}=\theta z^{(k)}$ pentru $k=\overline{0,n-1}$ astfel că din (544) va rezulta că soluția problemei (539) este

$$(545)\qquad y(t)=\int_0^t z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{k=0}^{n-1}b_kz^{(k)}(t),\quad t>0,$$

unde $z^{(k)}(t)$ sînt derivatele obișnuite ale funcției $z=z(t)$.

Distribuţii temperate. În afara spaţiilor fundamentale $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{E}$, în teoria distribuţiilor se foloseşte şi spaţiul $\mathcal{S}$, constînd din toate funcţiile $\varphi=\varphi(t)$ infinit derivabile pe axa reală care, împreună cu derivatele lor de orice ordin, sînt rapid descrescătoare pentru $|t|\to\infty$. Vom înţelege prin aceasta, că are loc condiţia

$$t^m\varphi^{(k)}(t)\to 0 \text{ pentru } |t|\to\infty, \tag{546}$$

oricare ar fi întregii $m\geqslant 0$, $k\geqslant 0$. Aceasta înseamnă că funcţia şi derivatele ei de orice ordin tind la 0 mai repede decît tinde la infinit orice putere a variabilei t.

Definiţia 2.7. Vom nota cu $\mathcal{S}$ spaţiul fundamental, constînd din toate funcţiile $\varphi=\varphi(t)$ infinit derivabile pe axa reală şi satisfăcînd condiţia de descreştere (546), pentru orice întregi fixaţi $m\geqslant 0$, $k\geqslant 0$.

Vom spune, prin definiţie, că un şir (φ_n) de funcţii din $\mathcal{S}$ tinde la 0 în acest spaţiu, dacă

$$t^m\varphi_n^{(k)}(t)\to 0 \quad \text{cînd } n\to\infty, \text{ uniform pe } R, \tag{547}$$

pentru orice întregi fixaţi $m\geqslant 0$, $k\geqslant 0$. De aici rezultă că un şir (φ_n) tinde în spaţiul $\mathcal{S}$ la o funcţie $\varphi\in\mathcal{S}$, notat prescurtat $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{S}}\varphi$, dacă

$$t^m\varphi_n^{(k)}(t)\to t^m\varphi^{(k)}(t) \text{ cînd } n\to\infty, \text{ uniform pe } R \tag{548}$$

pentru orice întregi fixaţi nenegativi m şi k. Este cu totul evidentă incluziunea

$$\mathcal{D}\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{E}, \tag{549}$$

nu numai în sens de mulţime, dar şi în sens topologic. Aceasta înseamnă că dacă $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi$, atunci $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{S}}\varphi$ şi de asemenea, dacă avem un şir convergent în spaţiul $\mathcal{S}$, el converge la aceeaşi limită şi în spaţiul $\mathcal{E}$ deci, dacă $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{S}}\varphi$ atunci $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{E}}\varphi$.

Definiţia 2.8. O funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{S}$ se numeşte distribuţie temperată.

Cu alte cuvinte, o funcţională T definită pe $\mathcal{S}$ este distribuţie temperată, dacă este liniară şi în plus

$$\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{S}}\varphi \text{ implică } (T,\varphi_n)\to(T,\varphi). \tag{550}$$

Mulţimea distribuţiilor temperate, adică dualul spaţiului $\mathcal{S}$, se notează cu $\mathcal{S}'$. Este evidentă incluziunea

$$\mathcal{E}'\subset\mathcal{S}'\subset\mathcal{D}', \tag{551}$$

care ne arată că toate distribuţiile cu suport compact sînt în acelaşi timp şi distribuţii temperate.

Funcţiile $f=f(t)$ local integrabile, care satisfac pe axa reală o majorare de forma

$$|f(t)|\leqslant A|t|^a \quad \text{cu} \quad a>0, \tag{552}$$

definesc distribuţii temperate prin formula

$$(f,\ \varphi)=\int_R f(t)\varphi(t)\,dt, \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}. \tag{553}$$

Integrala converge deoarece pentru φ fixat în $\mathcal{S}$, avem o majorare de forma $|\varphi(t)|\leqslant M/|t|^{a+2}$ valabilă pentru $|t|\geqslant t_0$, ceea ce antrenează că pentru orice t real, avem

$$|f(t)\varphi(t)|\leqslant\frac{B}{1+|t|^2}, \text{ deci } \int_R|f(t)\varphi(t)|\,dt<\infty. \tag{554}$$

Liniaritatea funcţionalei (553) este evidentă, iar continuitatea în origine (deci peste tot) poate fi dedusă din condiţia (547).

În particular, toate polinoamele sînt distribuţii temperate O funcţie original oarecare $f=f(t)$ nu este, în general vorbind, o distribuţie temperată, însă prin înmulţirea ei cu factorul $exp(-bt)$ cu $b>a$, unde a este exponentul ei de creştere, se obţine o distribuţie din $\mathcal{S}'$, deoarece $exp(-bt)f(t)=0$ pentru $t<0$ şi $|exp(-bt)f(t)|\leqslant A\ exp(-(b-a)t)$ pentru $t\geqslant 0$. În ceea ce priveşte transformata Laplace a funcţiei original $f=f(t)$, este evident că putem scrie pentru $\mathrm{Re}\,p>a$

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty e^{-bt}f(t)e^{-(p-b)t}\,dt. \tag{555}$$

Dacă presupunem că b satisface condiţia $a<b<\mathrm{Re}\,p$ şi luăm o funcţie infinit derivabilă $\alpha=\alpha(t)$, care ia valoarea 1 pentru $t\geqslant 0$ şi se anulează pentru un interval de forma $(-\infty, B)$ cu $B<0$, este clar că funcţia $\alpha(t)exp(-(p-b)t)$ aparţine spaţiului fundamental $\mathcal{S}$ şi am putea considera integrala (555) ca fiind valoarea dis-

tribuției temperate $exp(-bt)f(t)$ aplicată funcției $\alpha(t)exp(-(p-b)t)$, cu alte cuvinte am putea spune că

(556) $$F(p)=(e^{-bt}f(t),\ \alpha(t)e^{-(p-b)t}).$$

Valoarea precedentă nu este influențată de funcția $\alpha=\alpha(t)$ aleasă; altfel spus, dacă luăm o altă funcție $\beta=\beta(t)$ infinit derivabilă, egală cu 1 pentru $t\geqslant 0$ și care se anulează pe un interval de forma $(-\infty, C)$, obținem același rezultat. Aceasta ne dă dreptul să punem, prin definiție

(557) $$(e^{-bt}f(t),\ e^{-(p-b)t})=(e^{-bt}f(t),\ \alpha(t)e^{-(p-b)t})$$

ceea ce vrea să spună că valoarea distribuției temperate $exp(-bt)\cdot f(t)$, aplicată funcției $exp(-(p-b)t)$, care nu face parte din $\mathcal{S}$ are sens și este dată de membrul drept al egalității (557). Prin urmare, putem spune acum relativ la imaginea funcției original $f=f(t)$, că ea este dată în semiplanul $\mathrm{Re}\ p>a$, de formula

(558) $$F(p)=(e^{-bt}f(t),\ e^{-(p-b)t}),\ \text{unde}\ a<b<\mathrm{Re}\ p.$$

Se înțelege că valoarea $F(p)$ nu este influențată de b, cu alte cuvinte este aceeași, oricare ar fi $b\in(a, \mathrm{Re}\ p)$. Formula precedentă ne sugerează cum trebuie definită transformata Laplace a unei distribuții $T\in\mathcal{D}'_+$, care are proprietatea că $exp(-bt)T\in\mathcal{S}'$ pentru orice $b>a$, unde a este un număr fixat, depinzînd de T. Anume, această transformată va fi dată în semiplanul $\mathrm{Re}\ p>a$ de formula

(559) $$F(p)=(e^{-bt}T,\ e^{-(p-b)t}),\ \text{unde}\ a<b<\mathrm{Re}\ p,$$

în care, pentru ca totul să fie lămurit, se înțelege că am adoptat aceeași convenție ca și în cazul distribuțiilor de tip funcție asupra sensului membrului drept al egalității (559), adică

(560) $$(e^{-bt}T,\ e^{-(p-b)t})=(e^{-bt}T,\ \alpha(t)e^{-(b-p)t}),\quad a<b<\mathrm{Re}\ p,$$

unde $\alpha=\alpha(t)$ este o funcție infinit derivabilă, egală cu 1 pentru $t\geqslant 0$ și care se anulează pentru toate valorile t dintr-un interval $(-\infty, B)$ cu $B<0$. Desigur că expresia $(T, exp(-pt))$ nu are sens, în general vorbind. Dacă vom face convenția ca să atribuim acestui simbol valoarea dată de (560) (independentă de b), atunci vom putea spune că transformata Laplace a distribuției $T\in\mathcal{D}'_+$, pentru care $exp(-bt)T\in\mathcal{S}'$ dacă $b>a=$fixat, este dată prin formula

(561) $$F(p)=(T,\ e^{-pt}),\ \mathrm{Re}\ p>a.$$

Desigur, aceasta este valabil pentru orice distribuție T care satisface condițiile enunțate, în particular și pentru funcțiile original, deci putem spune acum că avem o definiție unică pentru transformata Laplace, independentă de faptul dacă T este sau nu este de tip funcție. Reamintim că pentru distribuțiile cu suport compact, definiția (561) nu necesită nici un fel de precizări suplimentare și a fost dată mai demult. S-a arătat, cu acea ocazie, că dacă $T\in\mathcal{E}'$ atunci $F(p)$ este olomorfă în tot planul complex. În cazul de față, adică pentru $F(p)$ dat de (561), se poate demonstra că această funcție este olomorfă în semiplanul $\mathrm{Re}\ p>a$. De asemenea și formula (470) rămîne valabilă, adică

(562) $$(-1)^n t^n T\leftrightarrow F^{(n)}(p),\quad \mathrm{Re}\ p>a.$$

Putem scrie, plecînd de la formula (561), imaginile unor distribuții care se obțin din identificarea unei funcții original $f=f(t)$ cu distribuția θf. Astfel, de exemplu, este evident că

(563) $$\theta(t)e^{\lambda t}\leftrightarrow\frac{1}{p-\lambda},\quad \theta(t)J_0(t)\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{p^2+1}},$$

prima valabilă pentru $\mathrm{Re}\ p>\mathrm{Re}\ \lambda$, a doua pentru $\mathrm{Re}\ p>0$. Pe scurt, plecînd de la relația $f(t)\leftrightarrow F(p)$ pentru $\mathrm{Re}\ p>a$, obținem $\theta(t)f(t)\leftrightarrow F(p)$ pentru $\mathrm{Re}\ p>a$.

Teorema 2.30. *Dacă S și T aparțin clasei $\mathcal{D}'_+$ și*

(564) $$S\leftrightarrow F(p)\quad \mathrm{Re}\ p>a,\quad T\leftrightarrow G(p),\quad \mathrm{Re}\ p>b,$$

atunci are loc formula

(565) $$S*T\leftrightarrow F(p)G(p),\quad \mathrm{Re}\ p>max\ \{a, b\}.$$

Demonstrație. Ținînd seama de formula (477), vom avea

(566) $$(S*T,\ e^{-pt})=(S(t),\ (T(u),\ e^{-p(t+u)}))=(S(t),\ G(p)e^{-pt})=$$
$$=G(p)(S(t),\ e^{-pt})=F(p)G(p),$$

pentru $\mathrm{Re}\ p>max\{a, b\}$. Prin urmare, putem spune că regula „imaginea produsului este egală cu produsul imaginilor" se menține și în cazul distribuțiilor care satisfac condițiile teoremei. În particular, regula (565) este valabilă în cazul distribuțiilor cu suport compact.

Aplicație. Dacă $T\in\mathcal{D}'_+$ și $T\leftrightarrow F(p)$ pentru $\operatorname{Re} p>a$, atunci

$$T^{(n)}\leftrightarrow p^nF(p) \quad \text{pentru} \quad \operatorname{Re} p>a. \tag{567}$$

În adevăr, putem scrie derivata de ordinul n a distribuției T ca un produs de convoluție. Mai precis, $T^{(n)}=\delta^{(n)}*T$ și în acord cu (565), vom avea

$$T^{(n)}\leftrightarrow p^nF(p), \quad \operatorname{Re} p>a, \tag{568}$$

oricare ar fi numărul natural n. Să verificăm această formulă într-un caz concret, pentru $n=1$. După cum se știe

$$\theta(t)e^{\lambda t}\leftrightarrow\frac{1}{p-\lambda}, \quad \operatorname{Re} p>\operatorname{Re}\lambda. \tag{569}$$

Derivînd odată distribuția $\theta(t)exp(\lambda t)$ și luînd imaginea derivatei, vom avea

$$\theta(t)\lambda e^{\lambda t}+\delta\leftrightarrow\frac{\lambda}{p-\lambda}+1=p\frac{1}{p-\lambda}, \tag{570}$$

adică (568) se verifică

Pentru aplicații, este important să se știe dacă o anumită funcție olomorfă $F=F(p)$ este sau nu este imaginea Laplace a unei distribuții $T\in\mathcal{D}'_+$. Răspunsul la această întrebare este dat de teorema care urmează, pe care însă nu o vom mai demonstra.

Teorema 2.31. *Condiția necesară și suficientă ca funcția de variabilă complexă $F=F(p)$ să fie transformata Laplace a unei distribuții $T\in\mathcal{D}'_+$ este ca ea să fie olomorfă într-un semiplan de forma $\operatorname{Re} p>a$ și să fie majorată în modul de un polinom în variabila $|p|$.*

Formula (565) permite rezolvarea în algebra $\mathcal{D}'_+$ a distribuțiilor cu suportul pe semiaxa $t\geqslant 0$, a ecuațiilor de forma $A*T=B$, în care A și B sînt două distribuții date, iar T este necunoscută.

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$\theta(t)J_1(t)*T=\delta, \tag{571}$$

în care $J_1(t)$ este funcția lui Bessel de speța întîi și ordinul 1. Ținînd seama de formula (250) (cazul $n=1$) și luînd în (571) transformata Laplace a ambilor membri, vom avea

$$\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}F(p)=1, \tag{572}$$

dacă notăm cu $F(p)$ imaginea necunoscutei T. De aici se obține că

$$F(p)=p^2+1+p\sqrt{p^2+1} \tag{573}$$

și pentru a citi originalul avem nevoie de contraimaginea lui $(p^2+1)^{1/2}$. Deoarece este evident că

$$\sqrt{p^2+1}=\frac{p^2+1}{\sqrt{p^2+1}}=p^2\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}, \tag{574}$$

vom putea scrie, ținînd seama de (250) (cazul $n=0$) și de (568) că

$$(\theta(t)J_0(t))''+\theta(t)J_0(t)\leftrightarrow\sqrt{p^2+1}, \tag{575}$$

unde bineînțeles, derivata este luată în sens distribuțional. Aplicînd regula de derivare a unei distribuții de tip funcție, găsim

$$(\theta(t)J_0(t))''=\theta(t)J_0''(t)+\sigma_0\delta'+\sigma_1\delta, \tag{576}$$

unde σ_0 și σ_1 sînt salturile în origine ale lui $J_0(t)$ și $J_0'(t)$. Din dezvoltarea în serie (307) (cap. I) se vede că $\sigma_0=1$, $\sigma_1=0$; tot de acolo se găsește și relația $J_0'(t)=-J_1(t)$. Așadar, putem transcrie (575) în forma mai convenabilă

$$-\theta(t)J_1'(t)+\theta(t)J_0(t)+\delta'\leftrightarrow\sqrt{p^2+1}. \tag{577}$$

Folosind din nou regula (568), deducem din relația precedentă că

$$-(\theta(t)J_1'(t))'+(\theta(t)J_0(t))'+\delta''\leftrightarrow p\sqrt{p^2+1}, \tag{578}$$

unde derivatele sînt luate în sens distribuțional. De aici, găsim

$$-\theta(t)J_1''(t)-\theta(t)J_1'(t)+\frac{1}{2}\delta+\delta''\leftrightarrow p\sqrt{p^2+1}. \tag{579}$$

Dacă dorim ca în expresia lui T să nu apară derivatele funcțiilor Bessel, vom ține seama că

$$t^2J_1''(t)+tJ_1'(t)+(t^2-1)J_1(t)=0, \tag{580}$$

deci

$$J_1''(t)=-\frac{1}{t}J_1'(t)+\left(\frac{1}{t^2}-1\right)J_1(t), \tag{581}$$

În sfîrșit, făcînd apel la formula (321) din primul capitol, găsim

$$-\frac{1}{t}J_1'(t)=\frac{1}{t}J_2(t)-\frac{1}{t^2}J_1(t) \tag{582}$$

și relația (579) poate fi scrisă acum astfel

$$(583)\qquad -\theta(t)\left(\frac{1}{t}J_2(t)-2J_1(t)\right)+\frac{1}{2}\,\delta+\delta''\leftrightarrow p\sqrt{p^2+1}.$$

În concluzie, ținînd seama de (573), rezultă că soluția ecuației (571) este distribuția T, dată de egalitatea

$$(584)\qquad T=-\theta(t)\left(\frac{1}{t}J_2(t)-2J_1(t)\right)+\frac{3}{2}\,\delta+2\delta''.$$

Observație. Distribuția T care satisface egalitatea $A*T=\delta$ se numește inversa lui A în algebra $\mathcal{D}'_+$. Denumirea provine din faptul că δ este elementul neutru față de operația produs de convoluție. În exemplul precedent, putem spune că T dat de (584) este inversa distribuției $\theta(t)J_1(t)$. S-a putut vedea și avantajul folosirii transformatei Laplace în exerciții de acest fel.

Exercițiu. Să se rezolve ecuația

$$(585)\qquad \theta(t)\sin t*T=\theta(t)\operatorname{ch} t.$$

Este clar că T nu poate fi de tip funcție, căci ar trebui să avem

$$(586)\qquad \int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\operatorname{ch} t,\qquad \text{pentru } t>0,$$

ceea ce este imposibil, dacă observăm că pentru $t\to 0$ primul membru tinde la 0, iar al doilea tinde la 1. Aplicînd în (585) transformata Laplace, găsim

$$(587)\qquad \frac{1}{p^2+1}F(p)=\frac{p}{p^2-1}\ \text{sau}\ F(p)=p+\frac{2p}{p^2-1},$$

dacă notăm cu $F(p)$ imaginea necunoscutei T. Prin urmare, soluția ecuației (585) este distribuția $T=\delta'+2\theta(t)\operatorname{ch} t$.

Pînă în prezent nu ne-am ocupat de convergența șirurilor sau seriilor de distribuții, dar se va vedea în exerciții că aceste noțiuni nu pot fi ocolite nici chiar în cele mai simple exemple. Dacă (T_n) este un șir de distribuții, avînd proprietatea că pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n,\varphi)$ există și este finită, se poate demonstra că funcționala T definită prin relația

$$(588)\qquad (T,\varphi)=\lim_{n\to\infty}(T_n,\varphi),\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}$$

este o distribuție, adică $T\in\mathcal{D}'$. Vom spune în acest caz că șirul (T_n) converge în $\mathcal{D}'$ la distribuția T și vom nota aceasta prin simbolul

$$(589)\qquad T_n\to T\ \text{ sau }\ \lim_{n\to\infty}T_n=T.$$

Vom spune că seria de distribuții $\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n$ este convergentă, dacă șirul sumelor sale parțiale este convergent. Prin definiție, suma seriei este limita șirului sumelor sale parțiale. Deci, în caz de convergență

$$(590)\qquad T=\sum_{n=1}^{\infty}T_n\Leftrightarrow T=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k,$$

sau cu alte cuvinte,

$$(591)\qquad (T,\varphi)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}T_k,\varphi\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(T_k,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}(T_n,\varphi),$$

oricare ar fi elementul $\varphi\in\mathcal{D}$.

Exemplu. Seria

$$(592)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\delta_n=\delta+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n+\ldots,$$

unde δ_a este definit prin formula (413), este convergentă deoarece pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}$, seria numerică

$$(593)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(\delta_n,\varphi)=\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)+\ldots$$

are numai un număr finit de termeni diferiți de 0.

Se poate demonstra ușor următoarea afirmație

$$(594)\qquad \text{dacă } T_n\xrightarrow{\mathcal{D}'}T,\ \text{atunci } T'_n\xrightarrow{\mathcal{D}'}T'.$$

În adevăr, putem scrie

$$(595)\qquad (T'_n,\varphi)=-(T_n,\varphi')\to-(T,\varphi')=(T',\varphi),$$

pentru orice funcție $\varphi\in\mathcal{D}$, ceea ce înseamnă că bazîndu-ne pe convergența șirului (T_n) la distribuția T, am dedus convergența

şirului (T'_n) la distribuţia T'. Este cu totul evident că putem generaliza, adică este adevărată afirmaţia:

(596) dacă $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$, atunci $T_n^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{D}'} T^{(k)}$,

oricare ar fi ordinul de derivare k.

Transpusă în cazul seriilor de distribuţii, afirmaţia precedentă ia forma următoare

(597) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(k)} = T^{(k)}$,

oricare ar fi ordinul de derivare k.

Aplicaţie. Dacă notăm cu T suma seriei convergente (592), atunci putem spune că

(598) $$T' = \sum_{n=0}^{\infty} \delta'_n,$$

adică am făcut derivarea după regula „termen cu termen".

1) Să se afle imaginea funcţiei

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 2na < t < (2n+1)a \\ 0, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, \end{cases}$$

unde $a>0$ este fixat, iar n ia pe rînd valorile 0, 1, 2, ... Se înţelege că $f(t)=0$ pentru $t<0$.

Rezolvare. Dacă am face graficul funcţiei original $f=f(t)$, am vedea că este vorba de o funcţie periodică cu perioada $2a$. Aplicînd formula găsită în text (imaginea unei funcţii periodice), avem

$$F(p) = \frac{\int_0^{2a} e^{-pt} f(t)\,dt}{1-e^{-2ap}} = \frac{\int_0^{a} e^{-pt}\,dt}{1-e^{-2ap}} = \frac{1}{p(1+e^{-ap})},$$

valabilă pentru $\operatorname{Re} p>0$.

2) Să se afle imaginea funcţiei „fierăstrău"

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} - n, & na \leqslant t < (n+1)a \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

Rezolvare. Dacă facem graficul, vedem că şi aceasta este o funcţie periodică, avînd perioada a.

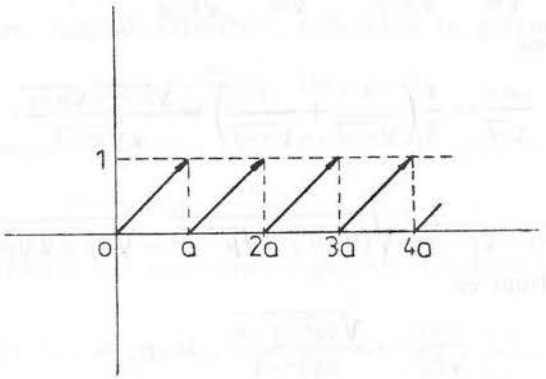

Fig. 2.5

Imaginea ei va fi deci

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-ap}} \int_0^a e^{-pt} \frac{t}{a}\,dt = \frac{1+ap-e^{ap}}{ap^2(1-e^{ap})}, \quad \operatorname{Re} p>0.$$

3) Să se afle imaginea funcţiei

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}, & t>0 \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

Rezolvare. Deoarece

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}} \leftrightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}, \quad \operatorname{Re} p>0,$$

rezultă imediat că

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad \operatorname{Re} p>0.$$

Din relaţiile evidente

$$\frac{e^{jt}}{\sqrt{\pi t}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p-j}} \text{ şi } \frac{e^{-jt}}{\sqrt{\pi t}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p+j}}, \quad \operatorname{Re} p>0,$$

se deduce că

$$\frac{\cos t}{\sqrt{\pi t}} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p-j}}+\frac{1}{\sqrt{p+j}}\right)=\frac{\sqrt{p+j}+\sqrt{p-j}}{2\sqrt{p^2+1}}.$$

Deoarece

$$\sqrt{p+j}+\sqrt{p-j}=\sqrt{(\sqrt{p+j}+\sqrt{p-j})^2}=\sqrt{2p+2\sqrt{p^2+1}},$$

rezultă în final că

$$\frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} \leftrightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2\sqrt{p^2+1}}, \quad \operatorname{Re} p>0.$$

În mod asemănător, găsim şi relaţia

$$\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} \leftrightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2\sqrt{p^2+1}}, \quad \operatorname{Re} p>0.$$

4) Să se demonstreze relaţiile

$$\frac{\operatorname{ch} t}{\sqrt{2\pi t}} \leftrightarrow \frac{\sqrt{p+\sqrt{p^2-1}}}{2\sqrt{p^2-1}} \text{ şi } \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{2\pi t}} \leftrightarrow \frac{\sqrt{p-\sqrt{p^2-1}}}{2\sqrt{p^2-1}},$$

unde funcţiile imagine sînt definite şi olomorfe în semiplanul $\operatorname{Re} p>1$.

5.) Să se demonstreze că

$$\int_0^t \frac{\cos\tau-1}{\tau}\,d\tau \leftrightarrow \frac{1}{p}\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}, \quad \operatorname{Re} p>0.$$

6.) Să se arate că soluţia ecuaţiei integrale singulare

$$\int_0^t \frac{y(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \sin 2\sqrt{t}, \quad t\geqslant 0$$

este funcţia $y(t)=J_0(2\sqrt{t})$.

7) Să se afle transformata Laplace a polinomului Laguerre

$$L_n(t)=e^t(t^ne^{-t})^{(n)}.$$

Rezolvare. Scriind $f(t)=t^ne^{-t}$, observăm în primul rînd că

$$f(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p>-1.$$

Apoi, deoarece $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$, putem scrie

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n\,\frac{n!}{(p+1)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p>-1$$

şi folosind una din cele mai simple reguli ale calculului operaţional, găsim

$$e^tf^{(n)}(t)=L_n(t)\leftrightarrow(p-1)^n\,\frac{n!}{p^{n+1}}=\frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n,$$

valabilă pentru $\operatorname{Re} p>0$.

8) Folosind dezvoltarea în serie Laurent, să se afle originalele funcţiilor-imagine

a) $\ln\frac{p+1}{p-1}$; b) $\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)$; c) $\ln\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$,

olomorfe în semiplanul $\operatorname{Re} p>1$.

Răspuns. a) $(e^t-e^{-t})/t$; b) $(1-\cos t)/t$; c) $(1-\operatorname{ch} t)/t$.

9) Considerăm funcţia definită pe axa reală

$$f_n(t)=\frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Să se arate că şirul (f_n) converge în $\mathcal{D}'$ la distribuţia lui Dirac, adică

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta.$$

Rezolvare. Dacă identificăm funcţia f_n cu o distribuţie, avem

$$(f_n,\ \varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n\varphi(t)dt}{\pi(1+n^2t^2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(u/n)du}{1+u^2},$$

pentru orice funcție φ din spațiul fundamental $\mathcal{D}$. Din relația evidentă

$$(f_n, \varphi)-(\delta, \varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(u/n)-\varphi(0)}{1+u^2}\,du,$$

ținînd seama și de faptul că φ are suportul mărginit, se obține imediat că

$$(f_n, \varphi)\to(\delta, \varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D},$$

care justifică afirmația din enunț. Deoarece pentru șirul (f_n) există limita punctuală în orice punct al axei reale și anume

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ +\infty, & t=0,\end{cases}$$

se mai spune uneori, în mod necorect, că $\delta=\delta(t)$ este „funcția lui Dirac, care are valoarea $+\infty$ în origine și este egală cu 0 în rest".

10) Considerăm șirul de funcții definite pe axa reală

$$f_n(t)=\frac{n}{\pi(1+n^2(t-a)^2)}, \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Să se arate că

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_a,$$

unde δ_a este distribuția (413).

11) Dacă T_n este distribuția generată de funcția $n\left(\theta(t)-\right.$ $\left.-\theta(t-\frac{1}{n})\right)$ unde $\theta(t)$ este funcția lui Heaviside, să se arate că au loc relațiile

$$T_n\xrightarrow{\mathcal{D}'}\delta, \quad n(\delta-\delta_{1/n})\xrightarrow{\mathcal{D}'}\delta'.$$

Indicație. Prin $\theta(t-a)$ se notează funcția care ia valoarea 1 pentru $t>a$ și valoarea 0 pentru $t<a$. Derivata distribuției generate de $\theta(t-a)$ este δ_a.

12) Dacă $f=f(t)$ și derivatele sale sînt funcții original, avînd discontinuități de speța întîi numai în origine, să se regăsească imaginea derivatei $f^{(n)}(t)$ (formula (55)), folosind regulile de calcul pentru transformata Laplace a distribuțiilor.

Rezolvare. Identificînd funcția $f=f(t)$ cu distribuția $\theta(t)f(t)$, avem

$$(\theta(t)f(t))^{(n)}=\theta(t)f^{(n)}(t)+\sigma_0\delta^{(n-1)}+\sigma_1\delta^{(n-2)}+\ldots+\sigma_{n-1}\delta,$$

în conformitate cu formula (425). În cazul de față, σ_k=saltul derivatei de ordinul k în origine$=f^{(k)}(0+)$. Dacă notăm cu $F(p)$ imaginea lui $f(t)$ și ținem seama de regula (568), luînd transformata ambilor membri ai egalității precedente, găsim

$$p^nF(p)=\text{imaginea }(\theta(t)f^{(n)}(t))+f(0+)p^{n-1}+f'(0+)p^{n-2}+$$
$$+\ldots+f^{(n-1)}(0+),$$

de unde rezultă

$$\theta(t)f^{(n)}(t)\leftrightarrow p^nF(p)-p^{n-1}f(0+)-p^{n-2}f'(0+)-\ldots-f^{(n-1)}(0+),$$

adică tocmai ce trebuia demonstrat. Factorul $\theta(t)$ poate fi omis, deoarece $f^{(n)}(t)$ este o funcție original.

13) Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned}tx'(t)&=2x-y+z\\ ty'(t)&=x+2y-z, \quad x(1)=1,\ y(0)=z(0)=0.\\ tz'(t)&=x-y+2z\end{aligned}$$

Indicație. Se face schimbarea de variabilă independentă $t=e^\tau$. Dacă se notează $x(t)=x(e^\tau)=x_1(\tau)$ etc., se ajunge la problema echivalentă

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau}&=2x_1-y_1+z_1\\ \frac{dy_1}{d\tau}&=x_1+2y_1-z_1 \qquad x_1(0)=1,\ y_1(0)=z_1(0)=0,\\ \frac{dz_1}{d\tau}&=x_1-y_1+2z_1\end{aligned}$$

care poate fi rezolvată cu metoda operațională.

14) Să se afle soluția ecuației

$$y''(t)+y(t)=f(t)\ \ y(0)=y'(0)=0,$$

unde funcția original $f=f(t)$ este dată prin relația

$$f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<1\\ 4, & t>1\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Rezolvare. Soluția va fi o funcție cu derivată continuă pe axa reală; derivata de ordinul doi va avea discontinuitate de speța întîia în punctele $t=0$ și $t=1$. Notînd cu $Y=Y(p)$ imaginea funcției necunoscute $y=y(t)$, vom avea

$$y'(t)\leftrightarrow pY(p), \quad y''(t)\leftrightarrow p^2Y(p).$$

Imaginea funcției $f=f(t)$ este dată de relația

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=2\int_0^1 e^{-pt}\,dt+4\int_1^\infty e^{-pt}\,dt=\frac{2}{p}(1+e^{-p}).$$

Luînd transformata Laplace în ambii membri ai ecuației date, găsim

$$Y(p)=\frac{2}{p(p^2+1)}(1+e^{-p})=2\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\right)(1+e^{-p}),$$

al cărei original este funcția

$$y(t)=2(1-\cos t)\theta(t)+2(1-\cos(t-1))\theta(t-1),$$

unde $\theta=\theta(t)$ este funcția unitate a lui Heaviside. Formula precedentă ne dă soluția (unică) a problemei propuse.

15) Să se afle soluția ecuației

$$y''(t)+4y(t)=f(t), \quad y(0)=y'(0)=0,$$

unde funcția original $f=f(t)$ este dată prin relația

$$f(t)=\begin{cases}2t & 0<t<1\\ -2t+2, & 1<t<2\\ 0, & t<0 \text{ sau } t>2.\end{cases}$$

Rezolvare. Ca și în cazul precedent, soluția va fi o funcție cu derivată continuă. Derivata a doua va avea discontinuități de speța întîi în punctele $t=1$ și $t=2$. Dacă notăm imaginea soluției căutate cu $Y(p)$, imaginea derivatei $y'(t)$ este $pY(p)$, iar a derivatei $y''(t)$ este $p^2Y(p)$. Imaginea termenului liber este funcția

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=\int_0^1 e^{-pt}2t\,dt+\int_1^2 e^{-pt}(-2t+2)\,dt=$$
$$=\frac{2}{p^2}-\frac{2(p+2)}{p^2}e^{-p}+\frac{2(p+1)}{p^2}e^{-2p}.$$

După aplicarea transformatei Laplace, din ecuația dată obținem ecuația algebrică $(p^2+4)Y(p)=F(p)$, care ne duce la concluzia că

$$Y(p)=\frac{2}{p^2(p^2+4)}-\frac{2(p+2)}{p^2(p^2+4)}e^{-p}+\frac{2(p+1)}{p^2(p^2+4)}e^{-2p}.$$

Deoarece avem descompunerile

$$\frac{2}{p^2(p^2+4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+4}\right), \quad \frac{2(p+2)}{p^2(p^2+4)}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{p^2+4};$$
$$\frac{2(p+1)}{p^2(p^2+4)}=\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+4},$$

vom găsi, ținînd seama și de întîrzierea argumentului (Teorema 2.5), următorul original, care este soluția căutată

$$y(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\theta(t)-$$
$$-\left[(t-1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\theta(t-1)+$$
$$+\left[\frac{1}{2}(t-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(t-2)-\frac{1}{4}\sin 2(t-2)\right]\theta(t-2).$$

16) Se consideră funcția $f=f(t)$ egală cu 0 pentru $t<0$, iar pentru $t\geqslant 0$ dată de relația

$$f(t)=\begin{cases}t-2n, & \text{pentru } 2n\leqslant t<2n+1\\ -t+2n+2, & \text{pentru } 2n+1\leqslant t<2n+2,\end{cases}$$

unde n ia pe rînd valorile 0, 1, 2, . . .

a) Să se calculeze direct imaginea $F=F(p)$ a funcției $f=f(t)$

b) Să se afle distribuția $\delta''*f(t)$.

c) Exprimînd imaginea convoluției prin două metode, să se regăsească rezultatul de la punctul a).

d) Să se afle soluția problemei

$$y''(t)-9y(t)=f(t), \quad y(0)=y'(0)=0.$$

Rezolvare. a) Dacă se face graficul

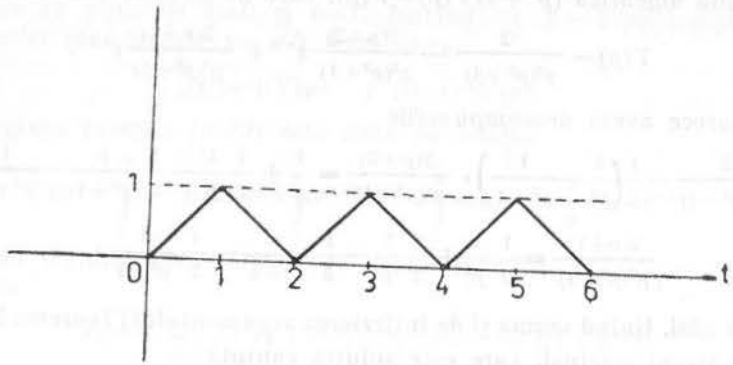

Fig. 2.6

se constată ușor că $f=f(t)$ este periodică pentru $t\geqslant 0$, avînd perioada 2. Imaginea $F(p)$ va fi dată de

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2p}}\int_0^2 e^{-pt}f(t)\,dt=\frac{1-e^{-p}}{p^2(1+e^{-p})},\quad \operatorname{Re} p>0.$$

b) Convoluția $\delta''*f(t)$ reprezintă derivata a doua a funcției $f=f(t)$ luată în sens distribuțional. Deoarece $f(t)=\theta(t)f(t)$, putem scrie

$$(\theta(t)f(t))''=\theta(t)f''(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^0\delta_n'+\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^1\delta_n,$$

unde σ_n^0 este saltul funcției $f=f(t)$ în punctul $t=n=$ întreg $\geqslant 0$, iar σ_n^1 este saltul derivatei $f'(t)$ în același punct.

Este de la sine înțeles că prin δ_n am notat distribuția (413), în care $a=n=$ întreg $\geqslant 0$. Din figură se vede că toate valorile σ_n^0 sînt egale cu 0, $\sigma_0^1=1$, iar $\sigma_{2n}^1=2$ și $\sigma_{2n-1}^1=-2$ pentru $n\geqslant 1$. Deoarece $f''(t)=0$ în toate punctele în care ea există, putem scrie formula precedentă mai convenabil, astfel

$$\delta''*f(t)=\delta+2\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{2n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{2n-1}.$$

c) Evident că imaginea distribuției $\delta''*f(t)$ este funcția $p^2F(p)$. Pe de altă parte, luînd imaginea termen cu termen în formula precedentă, găsim

$$\delta''*f(t)\leftrightarrow 1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2np}-2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(2n-1)p}=\frac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}}.$$

Egalînd cele două expresii, se regăsește valoarea lui $F(p)$.

d) Dacă se folosește metoda operațională, soluția căutată va apare ca suma unei serii relativ complicate. Este mai bine să facem apel la Teorema 2.29. Dacă notăm cu T distribuția θy, ajungem la ecuația $T''-9T=f$. După cum se știe, soluția acesteia este distribuția $\theta z*f$, unde $z=z(t)$ este funcția care satisface condițiile

$$z''(t)-9z(t)=0;\quad z(0)=0,\quad z'(0)=1,$$

adică $z(t)=(1/3)\operatorname{ch} 3t$. În concluzie, soluția căutată este

$$y(t)=\frac{1}{3}\int_0^t \operatorname{ch} 3(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad t\geqslant 0.$$

17) Un element $A\in\mathcal{D}'_+$ se numește inversabil, dacă există o distribuție $B\in\mathcal{D}'_+$ astfel încît $A*B=\delta$. B se notează A^{-1} și se numește inversa lui A. Plecînd de la observația că dacă A are imaginea $F(p)$, atunci B are imaginea $1/F(p)$, să se afle:

a) inversa distribuției $\delta+4\theta(t)\cos 2t$; b) inversa distribuției $\delta+\delta'+\theta(t)te^t$.

Rezolvare. a) În acest caz, $F(p)=1+(4p/p^2+4)=(p+2)^2/(p^2+4)$, Distribuția căutată are imaginea

$$\frac{p^2+4}{(p+2)^2}=1-\frac{4}{p+2}+\frac{8}{(p+2)^2},$$

deci putem spune că

$$(\delta+4\theta(t)\cos 2t)^{-1}=\delta-4\theta(t)e^{-2t}+8\theta(t)te^{-2t}.$$

b) Asemănător ca la punctul precedent.

18) Dacă $A\in\mathcal{D}'_+$ este inversabil, să se arate că ecuația $A*T=B$ are soluție unică, dată de formula $T=A^{-1}*B$. Plecînd de la această observație, să se rezolve ecuația integrală

$$y(t)+\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)y(\tau)\,d\tau=\sin t,\quad t\geqslant 0.$$

Rezolvare. Ecuația poate fi scrisă în forma echivalentă

$$(\delta+\theta(t)\operatorname{sh} t)*y=\theta(t)\sin t$$

și are soluția unică

$$y=(\delta+\theta(t)\operatorname{sh} t)^{-1}*\theta(t)\sin t.$$

În urma unui calcul elementar se obține că

$$y(t)=2\sin t-t, \quad t\geqslant 0.$$

2.4. TRANSFORMATA FOURIER

Să presupunem că funcția $f=f(t)$ definită pe axa reală este netedă pe porțiuni. Reamintim că aceasta înseamnă că atît $f(t)$, cît și $f'(t)$ pot avea pe fiecare interval finit al axei reale cel mult un număr finit de discontinuități de prima speță. Prin urmare, orice interval finit poate fi descompus într-un număr finit de subintervale, avînd proprietatea că în interiorul lor $f(t)$ și $f'(t)$ sînt continui, iar în extremități există limite laterale finite ale celor două funcții.

Dacă fixăm un număr $l>0$ atunci, după cum se arată în analiza matematică, pentru $t\in[-l, l]$ putem scrie

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right), \tag{599}$$

unde coeficienții Fourier au expresia

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt, \tag{600}$$

pentru $n\geqslant 0$ și respectiv $n\geqslant 1$. În punctele de discontinuitate ale funcției $f=f(t)$, suma seriei (599) este $(f(t+0)+f(t-0))/2$. Înlocuind expresiile coeficienților în seria Fourier, obținem egalitatea

$$f(t)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)\,du+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{n\pi}{l}(u-t)\,du. \tag{601}$$

Dacă facem acum ipoteza că $f=f(t)$ este absolut integrabilă pe axa reală, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<+\infty, \tag{602}$$

atunci, trecînd la limită pentru $l\to+\infty$ în relația (601), obținem

$$f(t)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{n\pi}{l}(u-t)\,du, \tag{603}$$

în orice punct de continuitate $t\in[-l, l]$. Notînd $n\pi/l=\omega_n$ și $\pi/l=\Delta\omega_n=\omega_{n+1}-\omega_n$, putem transcrie relația (603) în forma

$$f(t)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega_n\int_{-l}^{l}f(u)\cos\omega_n(u-t)\,du. \tag{604}$$

Dacă înlocuim integrala pe intervalul $[-l, l]$ cu integrala pe $(-\infty, \infty)$ și considerăm seria din partea dreaptă ca o „sumă integrală" a funcției de variabilă ω

$$g(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega(u-t)\,du, \quad t=\text{fixat}, \tag{605}$$

relativ la intervalul $0\leqslant\omega<\infty$, relația (604) ne-ar putea sugera că în toate punctele de continuitate ale lui $f=f(t)$ are loc egalitatea

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega\,(u-t)\,du. \tag{606}$$

Bineînțeles, argumentele precedente nu servesc drept demonstrație a formulei de inversare Fourier (606), ci doar ne-au ajutat să găsim relativ simplu această formulă, care trebuie justificată.

Teorema 2.32. *Dacă funcția $f=f(t)$, definită pe axa reală, este netedă pe porțiuni și are loc condiția* (602), *atunci în orice punct t are loc egalitatea*

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^l d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega\,(u-t)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega\,(u-t)du. \tag{607}$$

Demonstrație. Vom observa mai întîi că integrala generalizată

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega\,(u-t)du \tag{608}$$

converge uniform în raport cu parametrul $\omega\in[0,\infty)$, deoarece are loc majorarea evidentă $|f(u)\cos\omega\,(u-t)|\leqslant|f(u)|$, iar funcția $f=f(u)$ este absolut integrabilă, după cum reiese din (602). Din această cauză, este permisă schimbarea ordinii de integrare, adică putem scrie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^l d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega(u-t)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_0^l f(u)\cos\omega(u-t)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\frac{\sin l(u-t)}{u-t}du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t+u)\frac{\sin lu}{u}du. \tag{609}$$

Pentru a demonstra (607), este suficient să arătăm că

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(t+u)\frac{\sin lu}{u}du=\frac{f(t+0)}{2} \tag{610}$$

și respectiv

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}f(t+u)\frac{\sin lu}{u}du=\frac{f(t-0)}{2} \tag{611}$$

Vom justifica numai relația (610), deoarece pentru (611) se procedează asemănător. Folosind binecunoscuta egalitate

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin lu}{u}du=\frac{1}{2},\ \text{pentru } l>0, \tag{612}$$

putem scrie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(t+u)\frac{\sin lu}{u}du-\frac{f(t+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(t+u)-f(t+0)]\frac{\sin lu}{u}du, \tag{613}$$

t fiind, bineînțeles, fixat. Mai întîi, vom observa că dacă luăm un număr $\delta>0$ suficient de mic, avem

$$\left|\frac{f(t+u)-f(t+0)}{u}\right|<|f'_d(t)|+1,\quad u\in(0,\delta), \tag{614}$$

unde prin $f'_d(t)$ am notat limita la dreapta în punctul t a derivatei $f'(t)$. Conform ipotezei, această limită există și este finită.

Așadar

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(t+u)-f(t+0)]\frac{\sin lu}{u}du\right|<\frac{\delta}{\pi}(|f'_d(t)|+1). \tag{615}$$

Dacă luăm acum un număr $\varepsilon>0$, micșorîndu-l eventual pe δ, putem face ca primul termen al inegalității (615) să fie mai mic decît $\varepsilon/3$ și aceasta oricare ar fi $l>0$. Ne fixăm asupra unui δ care satisface condiția despre care am vorbit.

Pe de altă parte, dacă $A>0$ este suficient de mare, avem

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_A^{\infty}[f(t+u)-f(t+0)]\frac{\sin lu}{u}du\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_A^{\infty}|f(t+u)|\frac{du}{u}+$$

$$+\frac{|f(t+0)|}{\pi}\left|\int_A^{\infty}\frac{\sin lu}{u}du\right|\leqslant\frac{1}{\pi A}\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|du+\frac{|f(t+0)|}{\pi}\left|\int_{lA}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du\right|; \tag{616}$$

De aici se vede că, dacă $A>0$ este suficient de mare, primul termen al inegalității (616) este mai mic decît $\varepsilon/3$ și aceasta oricare ar fi $l\geqslant1$. Ne fixăm asupra unui A care satisface condiția spusă.

În teoria seriilor Fourier, este bine cunoscută afirmația că

$$\lim_{l\to\infty}\int_{\delta}^{A} g(u)\sin lu\,du=0, \tag{617}$$

unde $\delta>0$ și $A>0$ sînt fixați, iar $g=g(u)$ este o funcție absolut integrabilă pe $[\delta, A]$. Datorită acestui fapt, are loc inegalitatea

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{A}[f(l+u)-f(l+0)]\,\frac{\sin lu}{u}\,du\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{dacă } l>L(\varepsilon). \tag{618}$$

În concluzie, dat $\varepsilon>0$, avem

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(l+u)\,\frac{\sin lu}{u}\,du-\frac{f(l+0)}{2}\right|<\varepsilon, \tag{619}$$

cu singura condiție ca $l>L(\varepsilon)$ și deci (610) este adevărată. Demonstrația este terminată.

Desigur, putem scrie integrala lui Fourier și în forma

$$\frac{f(l+0)+f(l-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(l-u)du, \tag{620}$$

datorită parității funcției cosinus. Deoarece această formulă este valabilă și în cazul cînd funcția $f=f(l)$, care satisface restricțiile cerute de Teorema 2.32, este cu valori complexe, este bine să utilizăm și forma complexă a integralei Fourier. Anume, vrem să arătăm că

$$\frac{f(l+0)+f(l-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{j\omega(l-u)}du, \tag{621}$$

oricare ar fi l real. În adevăr, deoarece integrala (608) este funcție pară în raport cu variabila ω, avem

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(l-u)du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(l-u)du. \tag{622}$$

Pe de altă parte, valoarea integralei

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\omega(l-u)du \tag{623}$$

este o funcție impară în raport cu variabila ω, deci

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\omega(l-u)du=0, \tag{624}$$

numai că integrala precedentă trebuie înțeleasă în sensul valorii principale, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\omega(l-u)du=\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\omega(l-u)du. \tag{625}$$

Din (620), (622) și (624) rezultă tocmai formula (621), care astfel este demonstrată. În punctele de continuitate ale lui $f=f(l)$, membrul întîi al egalității (621) se înlocuiește, desigur, cu $f(l)$.

Rezultatul găsit îl putem transcrie în altă formă, spunînd că în fiecare punct de continuitate al lui $f=f(l)$, are loc relația

$$f(l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega l}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}du. \tag{626}$$

Dacă folosim notația

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}du, \quad \omega=\text{real}, \tag{627}$$

unde funcția $F(j\omega)$, definită pe axa reală, se numește transformata Fourier a lui $f=f(l)$, putem scrie (626) în forma echivalentă

$$f(l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega l}d\omega. \tag{628}$$

În concluzie, putem enunța

Teorema 2.33. *Dacă funcția $f=f(l)$ este absolut integrabilă pe axa reală și netedă pe porțiuni, atunci*

a) *transformata sa Fourier, definită de* (627), *există pentru orice* ω *real și este o funcție continuă de* ω.

b) *are loc formula de inversare* (628), *care trebuie înțeleasă astfel*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}F(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{629}$$

în toate punctele de continuitate ale lui $f=f(t)$.

Observația 1. Singura afirmație care nu a fost justificată este continuitatea transformatei Fourier $F(j\omega)$, ca funcție de parametrul real ω. Dar acest lucru este evident, deoarece integrala (627) este uniform convergentă în raport cu parametrul $\omega\in(-\infty,\infty)$.

Observația 2. Deoarece în cazul transformatei Laplace, formula de inversare Mellin-Fourier (114) a fost demonstrată reducînd-o la Teorema 2.32, rezultă că integrala

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty}e^{pt}F(p)\mathrm{d}p \tag{630}$$

trebuie interpretată de asemenea în sensul de „valoare principală", adică originalul se calculează de fapt după formula

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\lim_{A\to\infty}\int_{x-jA}^{x+jA}e^{pt}F(p)\mathrm{d}p,\quad \mathrm{Re}\,p>a, \tag{631}$$

unde a este exponentul de creștere al funcției $f=f(t)$.

Observația 3. Pentru existența și continuitatea transformatei Fourier a funcției $f=f(t)$, este suficient să presupunem că f este absolut integrabilă. Condiția asupra derivatei s-a impus pentru a putea fi siguri că are loc formula de inversare (628).

Observația 4. În electrotehnică, transformata Fourier poartă numele de „caracteristică spectrală" a funcției $f=f(t)$. Din definiția (627) rezultă o seamă de proprietăți, analoage celor de care se bucură transformata Laplace. Astfel, sînt evidente aditivitatea în raport cu funcția și proprietatea factorului constant. Vom nota pe viitor

$$\mathscr{F}\{f(t)\}=F(j\omega) \tag{632}$$

faptul că imaginea lui $f(t)$ este $F(j\omega)$.

Teorema 2.34. *Dacă* $f'(t)$ *este absolut integrabilă pe* $(-\infty,\infty)$ *și* $\lim f(t)=0$ *pentru* $t\to\pm\infty$, *atunci* $f=f(t)$ *admite transformată Fourier și*

$$\mathscr{F}\{f'(t)\}=j\omega F(j\omega). \tag{633}$$

Demonstrație. Afirmațiile făcute sînt o consecință directă a următoarei egalități

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=[f(t)e^{-j\omega t}]_{-\infty}^{\infty}+j\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t. \tag{634}$$

Dacă admitem că $f=f(t)$ are derivată pînă la ordinul n inclusiv, că $f^{(n)}(t)$ este absolut integrabilă pe axa reală și

$$\lim_{t\to\pm\infty}f^{(k)}(t)=0,\quad k=\overline{0,n-1}, \tag{635}$$

prin aplicarea repetată a formulei (633), obținem

$$\mathscr{F}\{f^{(n)}(t)\}=(j\omega)^nF(j\omega). \tag{636}$$

În cuvinte, referindu-ne la regula (633), putem spune că derivarea originalului are ca efect înmulțirea imaginii cu $j\omega$. În teorema precedentă, funcția $f=f(t)$ este continuă peste tot, derivata $f'(t)$ putînd să nu existe în anumite puncte. Dacă aplicăm formula (636), subînțelegem că funcția și primele $n-1$ derivate sînt continui peste tot, derivata $f^{(n)}(t)$ putînd să nu existe într-un număr finit de puncte.

Teorema 2.35. *Dacă* $f(t)$ *are transformata Fourier* $F(j\omega)$ *și* $\int_K f(t)\mathrm{d}t=0$, *atunci*

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=\frac{1}{j\omega}\cdot F(j\omega). \tag{637}$$

Demonstrație. Avem

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{j\omega}\,e^{-j\omega t}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]_{-\infty}^{\infty}+ \tag{638}$$

$$+\frac{1}{j\omega}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{j\omega}F(j\omega),$$

dacă aplicăm integrarea prin părți. Ne-am bazat pe faptul că

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau=\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau=0. \tag{639}$$

Exercițiul 1. Dacă $f(t)$ are transformata $F(j\omega)$, să se arate că

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\}=e^{-j\omega a}F(j\omega),\quad \mathcal{F}\{e^{-jat}f(t)\}=F(j(\omega+a)) \tag{640}$$

oricare ar fi a real.

Rezolvare. Scriind

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-j\omega t}\,dt \tag{641}$$

și făcînd în ultima integrală substituția $t-a=\tau$, unde τ este noua variabilă de integrare, vedem mai întîi că ea este convergentă și apoi că are valoarea $exp(-j\omega a)F(j\omega)$, oricare ar fi ω real. Relativ la a doua formulă (640), putem scrie

$$\mathcal{F}\{e^{-jat}f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jat}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega+a)t}dt= \tag{642}$$

$$=F(j(\omega+a)).$$

Exercițiul 2. Dacă $f(t)$ are transformata $F(j\omega)$, să se afle transformatele funcțiilor $f_1(t)=f(t)\cos at$ și $f_2(t)=f(t)\sin at$.

Rezolvare. Scriind

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{jat}+e^{-jat}}{2}e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-a)t}dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega+a)t}dt=\frac{1}{2}[F(j(\omega-a))+F(j(\omega+a))], \tag{643}$$

obținem că

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\}=\frac{1}{2}[F(j(\omega-a))+F(j(\omega+a))]. \tag{644}$$

La fel se arată că

$$\mathcal{F}\{f_2(t)\}=\frac{1}{2j}[F(j(\omega-a))-F(j(\omega+a))]. \tag{645}$$

Exercițiul 3. Dacă $f(t)$ are transformata $F(j\omega)$, să se arate că

$$\mathcal{F}\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(j\frac{\omega}{a}\right), \tag{646}$$

oricare ar fi constanta $a>0$.

Exercițiul 4. Dacă $\mathcal{F}\{f_1(t)\}=F_1(j\omega)$ și $\mathcal{F}\{f_2(t)\}=F_2(j\omega)$, să se arate că produsul de convoluție

$$(f_1*f_2)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau,\quad t=\text{real} \tag{647}$$

are transformata Fourier $F_1(j\omega)F_2(j\omega)$. Altfel spus, imaginea produsului este egală cu produsul imaginilor.

Rezolvare. Se poate demonstra că dacă f_1 și f_2 sînt absolut integrabile pe axa reală, atunci f_1*f_2 are aceeași proprietate. Vom putea scrie

$$\mathcal{F}\{(f_1*f_2)(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right]e^{-j\omega t}dt= \tag{648}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau.$$

Deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega\tau}F_1(j\omega), \tag{649}$$

prin înlocuire în (648) obținem

$$\mathcal{F}\{(f_1*f_2)(t)\}=F_1(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=F_1(j\omega)F_2(j\omega). \tag{650}$$

Reamintim că dacă $f_1(t)=0$ și $f_2(t)=0$ pentru $t<0$, atunci produsul de convoluție este dat de relația

$$(f_1*f_2)(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \displaystyle\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau, & t\geq 0,\end{cases} \tag{651}$$

Observație. Dacă $f=f(t)$ este o funcție original absolut integrabilă, atunci transformata Fourier $F(j\omega)$ este tocmai valoarea transformatei Laplace $F=F(p)$ în punctul $p=j\omega$ de pe axa imaginară. Prin urmare, notația $F(j\omega)$ pentru transformata Fourier nu a fost întîmplătoare. De exemplu, pentru funcția absolut integrabilă $\theta(t)e^{-t}$, transformata Laplace este $F(p)=1/(p+1)$ în semiplanul $\operatorname{Re} p>-1$. Deci

$$\mathcal{F}\{\theta(t)e^{-t}\}=\frac{1}{j\omega+1}, \quad \omega=\text{real}. \tag{652}$$

Exercițiul 5. Să se afle transformatele Fourier ale funcțiilor $f(t)=e^{-|t|}$, $f_1(t)=f(t)\cos t$ și $f_2(t)=f(t)\sin t$.

În legătură cu cele prezentate aici se înscriu alte două transformări integrale, numite „transformarea cosinus" și respectiv „transformarea sinus". Revenim la formula fundamentală (607) și facem ipoteza că funcția absolut integrabilă și netedă pe porțiuni $f=f(t)$ este pară, adică $f(t)=f(-t)$ pentru orice t real. În acest caz, nu este greu de văzut că

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(u-t)\,du=2\cos\omega t\int_0^{\infty} f(u)\cos\omega u\,du \tag{653}$$

și deci putem scrie, pentru orice t real, că

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega t\left(\int_0^{\infty} f(u)\cos\omega u\,du\right)d\omega. \tag{654}$$

Dacă în cazul cînd $f=f(t)$ este definită și absolut integrabilă pe semiaxa $t\geqslant 0$, definim prin formula

$$f_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt, \quad \omega\geqslant 0 \tag{655}$$

transformarea-cosinus a funcției $f=f(t)$, ținînd seama de (654) putem enunța

Teorema 2.36. *Dacă $f=f(t)$ definită pentru $t\geqslant 0$ este absolut integrabilă și netedă pe porțiuni, are loc formula de inversare*

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega, \quad t\geqslant 0 \tag{656}$$

în toate punctele de continuitate ale funcției f.

Se observă că f se obține din f_c, exact prin același procedeu din care se obține f_c din f. Mai putem spune că aplicarea repetată de două ori a transformării cosinus lasă funcția neschimbată. Se înțelege că în punctele de discontinuitate ale lui f, membrul întîi din (656) se înlocuiește cu semisuma limitelor laterale ale funcției f.

Dacă vom presupune acum că funcția $f=f(t)$ definită pe axa reală este impară, adică $f(t)=-f(-t)$ oricare ar fi t real, se vede ușor că

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(u-t)\,du=2\sin\omega t\int_0^{\infty} f(u)\sin\omega u\,du \tag{657}$$

și deci putem scrie, pentru orice t real, că

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\omega t\left(\int_0^{\infty} f(u)\sin\omega u\,du\right)d\omega. \tag{658}$$

Pentru $f=f(t)$ definită și absolut integrabilă pe semiaxa $t\geqslant 0$, definim prin formula

$$f_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt, \quad \omega\geqslant 0, \tag{659}$$

transformarea-sinus a funcției $f=f(t)$.

Imaginîndu-ne că am prelungit funcția f prin imparitate, pe toată axa reală și ținînd seama de (658), putem enunța

Teorema 2.37. *Dacă $f=f(t)$ definită pentru $t\geqslant 0$ este absolut integrabilă și netedă pe porțiuni, are loc formula de inversare*

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f_s(\omega)\sin\omega t\,d\omega, \quad t\geqslant 0 \tag{660}$$

în toate punctele de continuitate ale funcției f.

Se observă că f se obține din f_s, exact prin aceeași formulă cu care se obține f_s din f. Aplicarea repetată de două ori a transformării sinus lasă funcția neschimbată. În punctele de discontinuitate ale lui f, membrul întîi din (660) se înlocuiește cu semisuma limitelor laterale ale funcției f. Pentru $t=0$, membrul doi al egalității (660) este egal cu 0.

Clasa funcțiilor pentru care se poate defini transformata Fourier (caracteristica spectrală) poate fi considerabil extinsă, dacă se face apel la teoria distribuțiilor. Reamintim că $\mathscr{S}$ este spațiul funcțiilor infinit derivabile pe axa reală, care satisfac condiția (546). Se poate arăta că dacă $\varphi\in\mathscr{S}$, atunci transformata sa $\Phi(j\omega)$, notată prescurtat $\widehat{\varphi}(\omega)$, se bucură de aceeași proprietate. Aceasta înseamnă că $\varphi\in\mathscr{S}$ implică $\widehat{\varphi}\in\mathscr{S}$. Dar $\mathscr{S}$ este un spațiu topologic; în legătură cu aceasta se poate arăta că aplicația $\varphi\to\widehat{\varphi}$ este continuă în $\mathscr{S}$. Această afirmație poate fi redată astfel

$$\varphi_n\xrightarrow{\mathscr{S}}\varphi \quad \text{implică} \quad \widehat{\varphi}_n\xrightarrow{\mathscr{S}}\widehat{\varphi}. \tag{661}$$

Putem defini acum transformata Fourier a unei distribuții $T\in\mathscr{S}'$, adică a unei distribuții temperate. Prin definiție, distribuția $\widehat{T}$, dată de relația

$$(\widehat{T},\varphi)=(T,\widehat{\varphi}), \qquad \forall\varphi\in\mathscr{S} \tag{662}$$

se numește transformata Fourier a distribuției T. Ținînd seama de unele proprietăți elementare ale transformatei Fourier și de relația (661), rezultă că funcționala T definită de (662), este în adevăr o distribuție temperată. Ideea care a condus la această definiție provine din faptul că dacă $T=f=$funcție aparținînd spațiului $\mathscr{S}$, atunci distribuția generată de $\widehat{f}$ satisface relația $(f,\widehat{\varphi})=(\widehat{f},\varphi)$, oricare ar fi $\varphi\in\mathscr{S}$. În adevăr, are loc egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-jtu}\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-jtu}\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}u, \tag{663}$$

schimbarea ordinii de integrare fiind permisă dacă f și $\varphi\in\mathscr{S}$.

O teoremă importantă (Planchérel) afirmă că dacă $f=f(t)$ este o funcție de pătrat sumabil, adică $f\in L_2(-\infty,\infty)$, atunci transformata sa Fourier $\widehat{f}$ în sens distribuțional, este o distribuție de tip funcție; în plus, $\widehat{f}\in L_2(-\infty,\infty)$. În legătură cu aceasta, are loc următoarea

Teorema 2.38 (*Parseval*). *Dacă funcțiile $f_1=f_1(t)$ și $f_2=f_2(t)$ satisfac condiția*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_i(t)|^2\mathrm{d}t<\infty, \quad i=1,2 \tag{664}$$

și au transformatele Fourier $F_1(j\omega)$, respectiv $F_2(j\omega)$, atunci este adevărată egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(j\omega)F_2(-j\omega)\mathrm{d}\omega. \tag{665}$$

Demonstrație. Mai întîi vom observa că produsul a două funcții de pătrat sumabil este o funcție sumabilă (absolut integrabilă) pe axa reală, astfel că în formula precedentă au sens ambii termeni. Totuși, demonstrația o vom face într-un caz particular, presupunînd că funcțiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sînt absolut integrabile și că una din integralele

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_i(j\omega)\mathrm{d}\omega, \quad i=1,2 \tag{666}$$

converge absolut. Aplicînd formula de inversare, vom scrie

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{667}$$

și mai departe

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)\Big(\int_{-\infty}^{\infty}F_1(j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\Big)\mathrm{d}t= \tag{668}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(j\omega)\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}\omega,$$

dacă schimbăm ordinea de integrare. Deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)e^{j\omega t}\mathrm{d}t=F_2(-j\omega), \tag{669}$$

prin înlocuire în (668) se obține (665), Q.E.D.

Corolar. *Dacă funcția $f=f(t)$ definită pe axa reală, este de pătrat sumabil atunci, notînd cu $F(j\omega)$ transformata sa Fourier, putem scrie*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2\mathrm{d}\omega. \tag{670}$$

Demonstrație. Este suficient ca în teorema precedentă să luăm $f_1(t)=\overline{f(t)}$ și $f_2(t)=f(t)$. Vom mai observa că în acest caz, $F_2(-j\omega)=\overline{F_1(j\omega)}$. Din (665), obținem că

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\overline{F(j\omega)}\,d\omega, \tag{671}$$

ceea ce este echivalent cu (670). În particular, dacă $f(t)=0$ pentru $t<0$, regăsim de aici formula cunoscută (236).

Teorema 2.39. *Dacă funcțiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$ satisfac* (664) *și au transformatele $F_1(j\omega)$ și $F_2(j\omega)$, atunci*

$$\mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j(\omega-u))F_2(ju)\,du, \quad \omega=\text{real}. \tag{672}$$

Demonstrație. Integrala din partea dreaptă a egalității precedente se numește produsul de convoluție al imaginilor $F_1(j\omega)$ și $F_2(j\omega)$. Într-o formă prescurtată, conținutul acestei teoreme poate fi redat astfel: imaginea produsului aritmetic a două funcții este egală cu produsul de convoluție al imaginilor factorilor. O proprietate asemănătoare avea loc și în cazul transformatei Laplace (Teorema 2.20). Vom aplica formula Parseval (665) funcțiilor $f(t)=f_2(t)$ și $g(t)=f_1(t)e^{-j\omega t}$, unde ω este număr real fixat. Dacă $F(ju)$ și $G(ju)$ cu $u\in(-\infty, \infty)$ sînt imaginile funcțiilor f și g, putem scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(ju)G(-ju)\,du. \tag{673}$$

Observînd că $F(ju)=F_2(ju)$ și $G(ju)=F_1(j(\omega+u))$, putem retranscrie (673) în forma următoare

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j(\omega-u))F_2(ju)\,du, \tag{674}$$

care ne spune că (672) este adevărată, avînd în vedere că ω real a fost ales arbitrar. Este cu totul evidentă și relația

$$\mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(ju)F_2(j(\omega-u))\,du, \quad \omega=\text{real}, \tag{675}$$

care poate fi dedusă din (672) printr-o schimbare de variabilă.

EXERCIȚII

1) Dacă $f=f(t)$ este absolut integrabilă pe axa reală, iar $F(j\omega)$ este transformata sa Fourier, să se arate că

$$F(j\omega)\to 0, \quad \text{cînd} \quad |\omega|\to\infty.$$

Rezolvare. Fie $\varepsilon>0$ dat și $A=A(\varepsilon)>0$ astfel încît

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\,dt+\int_{A}^{\infty}|f(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Deoarece, după cum s-a mai spus, pentru $A=$fixat

$$\lim_{|\omega|\to\infty}\int_{-A}^{A} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=0,$$

tragem concluzia că $|F(j\omega)|<\varepsilon$ dacă $|\omega|\geqslant B(\varepsilon)$, ceea ce justifică afirmația făcută în enunț. Dacă reprezentăm în planul complex ecuația $z=F(j\omega)$, obținem o curbă continuă, care pentru $|\omega|\to\infty$ tinde la origine. De exemplu, pentru $f(t)=\theta(t)e^{-t}$, obținem $F(j\omega)=1/(j\omega+1)$, al cărei grafic (hodograf) are forma următoare

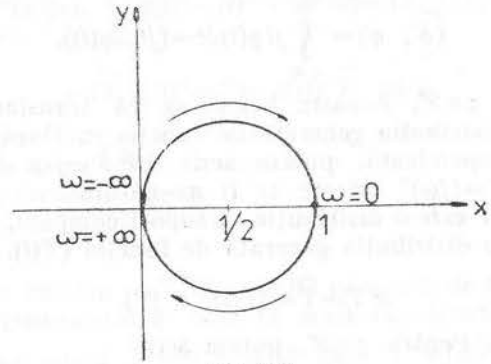

Fig. 2.7

adică este un cerc din care lipsește punctul $z=0$.

2) Să se afle transformatele Fourier (caracteristicile spectrale) ale distribuției δ și ale derivatelor sale.

Rezolvare. Conform definiției date $(\widehat{\delta},\ \varphi)=(\delta,\ \widehat{\varphi})=\widehat{\varphi}(0)$ pentru orice funcție $\varphi\in\mathscr{S}$. Deoarece

$$\widehat{\varphi}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-j\omega t}\,dt,\quad \omega=\text{real},$$

se vede că

$$\widehat{\varphi}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=(1,\ \varphi).$$

Din egalitatea $(\widehat{\delta},\ \varphi)=(1,\ \varphi)$ pentru orice $\varphi\in\mathscr{S}$, tragem concluzia că $\widehat{\delta}=1$. Putem scrie și $\mathscr{F}\delta=1$, ceea ce înseamnă că transformata Fourier a distribuției lui Dirac este funcția (distribuția) identic egală cu 1. Pentru δ' avem

$$(\widehat{\delta'},\ \varphi)=(\delta',\ \widehat{\varphi})=-(\delta,\ (\widehat{\varphi})')=-(\widehat{\varphi})'(0)$$

și deoarece

$$(\widehat{\varphi})'(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)(-jt)e^{-j\omega t}\,dt,\quad \omega=\text{real},$$

găsim că

$$(\widehat{\delta'},\ \varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}jt\varphi(t)dt=(jt,\ \varphi(t)),$$

pentru orice $\varphi\in\mathscr{S}$. Aceasta înseamnă că transformata lui δ' coincide cu distribuția generată de funcția jt. Dacă notăm cu ω variabila independentă, putem scrie $\mathscr{F}\delta'=j\omega$. Mai general, rezultă $\mathscr{F}\delta^{(n)}=(j\omega)^n$ oricare ar fi $n=$natural.

3) Dacă T este o distribuție cu suport compact, transformata sa coincide cu distribuția generată de funcția $(T(t),\ e^{-j\omega t})$, adică

$$\mathscr{F}T=\widehat{T}=(T(t),\ e^{-j\omega t}).$$

Rezolvare. Pentru $\varphi\in\mathscr{S}$, putem scrie

$$(\widehat{T},\ \varphi)=\Big(T,\ \widehat{\varphi}\Big)=(T(t),\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{-j\omega t}d\omega\Big)=\int_{-\infty}^{\infty}(T(t),\ \varphi(\omega)e^{-j\omega t})d\omega=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)(T(t),\ e^{-j\omega t})d\omega.$$

De aici rezultă afirmația făcută. Dacă notăm cu $F(p)$ funcția olomorfă în tot planul complex, dată prin relația $F(p)=(T(t),\ e^{-pt})=$transformata Laplace a distribuției T, constatăm că este adevărată egalitatea $\widehat{T}=F(j\omega)$.

4) Să se arate că dacă T este o distribuție temperată, atunci derivatele ei de orice ordin sînt distribuții temperate. În plus, are loc formula

$$\mathscr{F}T^{(n)}=(j\omega)^n\mathscr{F}T,$$

oricare ar fi $n=$natural.

Rezolvare. Conform definiției

$$(T^{(k)},\ \varphi)=(-1)^k(T,\ \varphi^{(k)}),\quad \forall\varphi\in\mathscr{S}.$$

Prima afirmație rezultă din faptul că dacă $\varphi_n\overset{\mathscr{S}}{\to}\varphi$, atunci $\varphi_n^{(k)}\overset{\mathscr{S}}{\to}\varphi^{(k)}$, oricare ar fi k fixat. Aceasta înseamnă că funcționala $T^{(k)}$ este continuă pe $\mathscr{S}$ și deoarece este liniară, rezultă că este o distribuție temperată. Pentru demonstrarea formulei enunțate, vom scrie

$$\widehat{(T^{(n)}},\ \varphi)=(T^{(n)},\ \widehat{\varphi})=(-1)^n(T,\ (\widehat{\varphi})^{(n)})=$$

$$=(-1)^n(T(\omega),\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)(-jt)^n\ e^{-j\omega t}dt)=(T(t),\ \widehat{(jt)^n\varphi(t)})=$$

$$=(\widehat{T}\ \ (jt)^n\varphi(t))=((jt)^n\widehat{T},\ \varphi(t)),$$

valabilă pentru orice $\varphi\in\mathscr{S}$. Dacă notăm variabila independentă cu ω în loc de t, din egalarea termenilor extremi ai relației precedente rezultă formula cerută.

5) Să se arate că $\mathscr{F}1=2\pi\delta$, ținînd seama de exercițiul precedent.

Rezolvare. Notăm cu T distribuția generată de funcția identic egală cu 1. Distribuția T' este în acest caz identic nulă, adică $T'=0$. Scriind odată $\widehat{T'}=0$ și altă dată $\widehat{T'}=j\omega\widehat{T}$, ajungem la concluzia că $\omega\widehat{T}=0$, ω fiind variabila independentă. După cum se știe, de aici rezultă $\widehat{T}=c\,\delta$, unde c este o anumită constantă. Pentru aflarea lui c, luăm funcția $\varphi(t)=e^{-t^2}$ din $\mathscr{S}$, care are transformata $\widehat{\varphi}(t)=\sqrt{\pi}e^{-t^2/4}$, după cum se poate vedea ușor

Vom scrie

$$(\widehat{T},\ \varphi)=(T,\ \widehat{\varphi})=(1,\ \widehat{\varphi})=\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/4}\mathrm{d}t=2\pi$$

și pe de altă parte $(\widehat{T},\ \varphi)=c(\delta,\ \varphi)=c\varphi(0)=c$. Rezultă $c=2\pi$ și deci $\widehat{T}=2\pi\delta$.

6) Dacă $\varphi\in\mathcal{S}$, să se arate că are loc relația

$$\mathcal{F}\{\varphi^{(n)}(t)\}=(j\omega)^n\widehat{\varphi}(\omega),$$

oricare ar fi n=natural. Folosind această formulă, să se demonstreze că

$$\mathcal{F}\{(-jt)^nT\}=\left(\widehat{T}\right)^{(n)},\quad n=\text{natural}.$$

Rezolvare. Dacă $\varphi\in\mathcal{S}$, este evident că sîntem în cazul Teoremei 2.34 și afirmația de aici rezultă din formula (636). Pentru justificarea celei de a doua afirmații, vom scrie

$$(\widehat{(-jt)^nT},\ \varphi)=((-jt)^nT,\ \widehat{\varphi})=(T(t),\ (-jt)^n\widehat{\varphi}(t))=$$

$$=(-1)^n(T,\ \widehat{\varphi^{(n)}})=(-1)^n(\widehat{T},\ \varphi^{(n)})=(\left(\widehat{T}\right)^{(n)},\ \varphi),$$

oricare ar fi funcția $\varphi\in\mathcal{S}$. Comparînd termenii extremi ai relației precedente, ajungem la concluzia dorită. Conținutul exercițiului poate fi redat astfel: înmulțirea distribuției cu factorul $(-jt)^n$ atrage derivarea de n ori a imaginii.

Luînd în formula găsită T=distribuția generată de funcția identic egală cu 1, găsim relația

$$\mathcal{F}\{(-jt)^n\}=2\pi\delta^{(n)},$$

oricare ar fi n=natural.

7) Dacă distribuțiile cu suport compact S și T au transformatele $F(j\omega)$ și $G(j\omega)$, să se arate că

$$\mathcal{F}\{S*T\}=F(j\omega)G(j\omega).$$

Rezolvare. $S*T$ va fi de asemenea cu suport compact și transformata ei va fi funcția $(S*T,\ e^{-j\omega t})$ de variabila independentă ω. Aplicînd definiția convoluției, găsim

$$(S*T,\ e^{-j\omega\cdot})=(S(t),\ (T(u),\ e^{-j\omega(t+u)}))=$$

$$=(S(t),\ e^{-j\omega t}G(j\omega))=G(j\omega)(S(t),\ e^{-j\omega t})=F(j\omega)G(j\omega).$$

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE FOLOSITE ÎN ELECTROTEHNICĂ

3.1. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL DOI

Dacă admitem că funcția necunoscută u depinde de două variabile independente x și y, forma generală a unei astfel de ecuații este

$$(1)\qquad F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,$$

în care F este o funcție dată, depinzînd de opt variabile indepen-

dente. Vom spune că o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi este liniară, dacă ea are forma

$$(2)\qquad a(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$

$$+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,\ y)u=g(x,\ y),$$

unde coeficienții a, b, c, d, e, f, g sînt funcții continui de x și y într-un domeniu D din plan. În cazul particular $g(x,\ y)=0$, se spune că ecuația (2) este liniară și omogenă. Pentru ecuația (2) au loc unele proprietăți simple, care amintesc de cele ale ecuației diferențiale liniare ordinare de ordinul al doilea. De exemplu, se poate arăta imediat că soluția sa generală este suma dintre o soluție particulară a sa și soluția generală a ecuației omogene corespunzătoare

$$(3)\qquad au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=0.$$

Apoi este cu totul evident că o combinație liniară cu coeficienți constanți de soluții particulare ale ecuației (3) este de asemenea o soluție particulară pentru aceeași ecuație.

Scopul nostru nu poate fi însă aprofundarea analogiei cu ecuația ordinară amintită mai sus, deoarece pentru ecuațiile cu derivate parțiale se pun anumite probleme specifice. Astfel, cunoașterea soluției generale a ecuației de care ne ocupăm nu ne va fi de prea mare folos, pentru că în general este greu să particularizăm funcțiile arbitrare care intră în expresia sa, încît să obținem o soluție care satisface condiții la limită date.

Se impune să remarcăm că pentru a descrie unele fenomene mecanice sau fizice, nu este suficient cazul cînd funcția necunoscută depinde numai de două variabile independente. De exemplu, pentru ecuația undelor în spațiu

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,\ y,\ z,\ t)$$

și respectiv pentru ecuația căldurii în spațiu

$$(5)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,\ y,\ z,\ t)$$

funcția necunoscută $u=u(x,\ y,\ z,\ t)$ depinde de patru variabile independente.

Referindu-ne la ecuația liniară (2), vom da următoarele definiții: (i) dacă în domeniul D avem inegalitatea $a(x,\ y)c(x,\ y)-b^2(x,y)>0$, spunem că ecuația este de tip eliptic.

(ii) dacă în D avem inegalitatea $a(x,\ y)c(x,\ y)-b^2(x,\ y)<0$, spunem că ecuația este de tip hiperbolic.

(iii) dacă în D avem identitatea $a(x,\ y)c(x,\ y)-b^2(x,\ y)\equiv 0$ spunem că ecuația este de tip parabolic.

Se poate ca o ecuație (2) să fie de un tip într-o anumită regiune a planului xOy și de alt tip în altă regiune, în funcție de semnul expresiei $ac-b^2$.

Vom demonstra că tipul unei ecuații este invariant la o schimbare de variabile independente. Fie

$$(6)\qquad \xi=\varphi(x,\ y),\ \eta=\psi(x,\ y)$$

o transformare care stabilește o corespondență biunivocă între punctele de coordonate $(x,\ y)$ din planul xOy și punctele de coordonate $(\xi,\ \eta)$ din planul $\xi O'\eta$. Vom admite că atît funcțiile (6) cît și funcțiile

$$(7)\qquad x=\varphi_1(\xi,\ \eta),\ y=\psi_1(\xi,\ \eta)$$

obținute prin rezolvarea în raport cu x și y a sistemului (6) au derivate parțiale de ordinul unu și doi continui și că iacobianul $D(\varphi,\ \psi)/D(x,\ y)$ este $\neq 0$ în D. Să admitem acum că prin intermediul transformării (6), funcția u depinde de ξ și η, adică $u=u(\xi,\ \eta)$. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse găsim

$$(8)\qquad u_x=u_\xi\,\varphi_x+u_\eta\,\psi_x,\ u_y=u_\xi\,\varphi_y+u_\eta\,\psi_y,$$

pentru derivatele de ordinul întîi ale lui u. În mod analog, vom găsi și derivatele secunde

$$(9)\qquad u_{xx}=u_{\xi\xi}\varphi_x^2+2u_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x+u_{\eta\eta}\psi_x^2+u_\xi\,\varphi_{xx}+u_\eta\,\psi_{xx}$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y+u_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y+u_\xi\,\varphi_{xy}+u_\eta\,\psi_{xy}$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\varphi_y^2+2u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y+u_{\eta\eta}\psi_y^2+u_\xi\,\varphi_{yy}+u_\eta\,\psi_{yy}.$$

Înlocuind expresiile (8) și (9) în ecuația (2) găsim:

$$(10)\qquad a'u_{\xi\xi}+2b'u_{\xi\eta}+c'u_{\eta\eta}+d'u_\xi+e'u_\eta+f'u=g',$$

în care coeficienții a', b', c' sînt dați de formulele

$$a'=a\varphi_x^2+2b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2$$

$$b'=a\varphi_x\psi_x+b(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+c\varphi_y\psi_y \tag{11}$$

$$c'=a\psi_x^2+2b\psi_x\psi_y+c\psi_y^2.$$

Se constată ușor că are loc relația

$$a'c'-(b')^2=(ac-b^2)\left(\frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(x,\ y)}\right)^2, \tag{12}$$

de unde rezultă că tipul ecuației (2) este invariant la o schimbare de variabile independente. Coeficienții ecuației transformate (10) putem să-i considerăm fie ca depinzînd de ξ și η, fie ca depinzînd x și y, dacă avem în vedere (6).

Să admitem că (2) este de tip hiperbolic și să căutăm două funcții $\varphi=\varphi(x, y)$ și $\psi=\psi(x, y)$ astfel încît prin intermediul lui (6), ecuația transformată (10) să aibă o formă mai simplă. Mai precis, căutăm φ și ψ de așa manieră, încît să avem $a'=c'=0$. Condiția $a'=0$ este echivalentă cu:

$$a(x,\ y)\varphi_x^2+2b(x,\ y)\varphi_x\varphi_y+c(x,\ y)\varphi_y^2=0, \tag{13}$$

care în ipoteza $\varphi_y\neq 0$ poate fi scrisă astfel:

$$a(x,\ y)\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2+2b(x,\ y)\frac{\varphi_x}{\varphi_y}+c(x,\ y)=0. \tag{14}$$

Dacă presupunem că ecuația $\varphi(x, y)=$constant ne definește pe y ca funcție implicită de x, am avea pentru derivata $y'(x)$ expresia $y'(x)=-(\varphi_x(x, y)/\varphi_y(x, y))$, adică $y=y(x)$ satisface ecuația diferențială ordinară

$$a(x,\ y)(y')^2-2b(x,\ y)y'+c(x,\ y)=0, \tag{15}$$

numită și ecuația caracteristică pentru (2). Reciproc, o integrală primă $\varphi=\varphi(x, y)$ a ecuației (15) satisface (13). Or, în cazul hiperbolic, ecuația (15) se descompune prin explicitare în raport cu y' în două ecuații mai simple și anume:

$$y'=\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \text{ sau } y'=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}. \tag{16}$$

Dacă punem $\xi=\varphi(x, y)$ și $\eta=\psi(x, y)$, unde φ și ψ sînt integrale prime pentru prima și respectiv a doua din ecuațiile (16), obținem $a'=c'=0$. Se poate vedea că condiția $D(\varphi, \psi)/D(x, y)\neq 0$ în D este îndeplinită. Apoi, este clar că $b'\neq 0$, deoarece $a'c'-(b')^2<0$. Prin împărțire cu b', ecuația transformată (10) ia forma

$$u_{\xi\eta}+A(\xi,\ \eta)u_\xi+B(\xi,\ \eta)u_\eta+C(\xi,\ \eta)u=D(\xi,\ \eta), \tag{17}$$

numită și forma canonică a ecuației liniare hiperbolice (2).

Să admitem acum că ecuația (2) este de tip parabolic, adică $a(x, y)c(x, y)-b^2(x, y)\equiv 0$ în D' și că $a(x, y)\neq 0$ în D. În acest caz, ecuația caracteristică (15) este echivalentă cu $y'=b/a$ și deci putem găsi numai o singură funcție $\varphi=\varphi(x, y)$ care satisface (13). Luăm o altă funcție $\psi=\psi(x, y)$ de clasă $C^2(D)$, adică cu derivate parțiale de ordinul unu și doi continui în D, în așa fel încît φ și ψ să fie funcțional independente în D, adică $D(\varphi, \psi)/D(x, y)\neq 0$ în D. Punînd $\xi=\varphi(x, y)$ și $\eta=\psi(x, y)$, vom obține $a'=0$ în ecuația transformată (10). Dar deoarece $a'c'-(b')^2\equiv 0$, rezultă și $b'=0$. Dacă noul coeficient $c'\neq 0$, împărțim prin el ecuația obținută și ajungem la

$$u_{\eta\eta}+A(\xi,\ \eta)u_\xi+B(\xi,\ \eta)u_\eta+C(\xi,\ \eta)u=D(\xi,\ \eta), \tag{18}$$

care este forma canonică a ecuației parabolice.

În sfîrșit, să admitem că ecuația (2) este de tip eliptic în D. De data aceasta, ecuația caracteristică (15) se descompune în două ecuații de forma:

$$y'=\alpha(x,\ y)+j\beta(x,\ y) \text{ sau } y'=\alpha(x,\ y)-j\beta(x,\ y), \tag{19}$$

unde $\alpha(x, y)$ și $\beta(x, y)$ sînt funcții reale. Dacă admitem că aceste funcții sînt analitice, adică pot fi dezvoltate în serie după puterile lui $x-x_0$ și $y-y_0$ în jurul fiecărui punct $(x_0, y_0)\in D$, atunci se poate arăta că integrala generală a primei ecuații (19) este de forma $\varphi(x, y)+j\psi(x, y)=$constant, unde φ și ψ sînt reale. Scriind că $\varphi+j\psi$ satisface ecuația (13), adică

$$a(\varphi_x+j\psi_x)^2+2b(\varphi_x+j\psi_x)(\varphi_y+j\psi_y)+c(\varphi_y+j\psi_y)^2=0 \tag{20}$$

se obține:

$$(a\varphi_x^2+2b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2)-(a\psi_x^2+2b\psi_x\psi_y+c\psi_y^2)+$$
$$+2j[(\varphi_x\psi_x+b(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+c\varphi_y\psi_y]=0. \tag{21}$$

Dacă punem $\xi=\varphi(x, y)$ și $\eta=\psi(x, y)$, rezultă că $a'=c'$ și $b'=0$, avînd în vedere formulele (11). Din $a'c'-(b')^2>0$ rezultă $a'\neq 0$ și prin împărțirea ecuației transformate (10) cu a', se obține:

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+A(\xi, \eta)u_\xi+B(\xi, \eta)u_\eta+C(\xi, \eta)u=D(\xi, \eta), \tag{22}$$

care este forma canonică a ecuației liniare eliptice (2).

Exemplu. Considerăm ecuația

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=0;\ a,\ b,\ c=\text{const.}, \tag{23}$$

în care măcar un coeficient este $\neq 0$. Să se aducă la forma canonică

Rezolvare. Ecuația caracteristică atașată este $a(y')^2-2by'+c=0$. Dacă $ac-b^2<0$, găsim $y'=\lambda_1$ și $y'=\lambda_2$ unde $\lambda_1\neq\lambda_2$ sînt cele două rădăcini (reale) ale ecuației $a\lambda^2-2b\lambda+c=0$. În acest caz $\varphi=y-\lambda_1 x$ și $\psi=y-\lambda_2 x$. Punînd $\xi=y-\lambda_1 x$ și $\eta=y-\lambda_2 x$ se ajunge la ecuația $u_{\xi\eta}=0$, care are soluția $u=f(\xi)+g(\eta)$, cu f și g funcții arbitrare de clasă C^2. Prin urmare, dacă $ac-b^2<0$ soluția generală a ecuației (23) este $u=f(y-\lambda_1 x)+g(y-\lambda_2 x)$, unde f și g sînt două funcții arbitrare de clasă C^2.

Dacă $ac-b^2=0$ și $a\neq 0$, ecuația $a\lambda^2-2b\lambda+c=0$ are rădăcina dublă $\lambda=\lambda_1=b/a$. Ecuația caracteristică atașată are în acest caz o singură integrală primă $\varphi=y-\lambda_1 x$. Luînd $\psi=\psi(x, y)$ încît φ și ψ să aibă iacobianul $\neq 0$ în D, ajungem la forma canonică $u_{\eta\eta}=0$, de unde deducem $u=\eta f(\xi)+g(\xi)$, cu f și g funcții arbitrare de clasă C^2. Prin urmare, dacă $ac-b^2=0$ soluția generală a ecuației (23) este $u=\psi(x, y)f(y-\lambda_1 x)+g(y-\lambda_1 x)$, unde f și g sînt două funcții arbitrare de clasă C^2.

Dacă $ac-b^2>0$, ecuația $a\lambda^2-2b\lambda+c=0$ are rădăcinile complexe $\lambda_1=\alpha+j\beta$ și $\lambda_2=\alpha-j\beta$ cu $\beta\neq 0$. Din $y'=\alpha+j\beta$, găsim $y=(\alpha+j\beta)x+\text{const.}$ sau $y-\alpha x-j\beta x=\text{const.}$ Punînd $\xi=y-\alpha x$ și $\eta=\beta x$, ajungem la forma canonică $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, ceea ce înseamnă că u este o funcție armonică în variabilele ξ și η.

Observație. Curbele $\varphi(x, y)=\text{const.}$ în lungul cărora este satisfăcută ecuația caracteristică (15) se numesc curbe caracteristice ale ecuației liniare (2). Putem spune că o ecuație hiperbolică are două familii $\varphi(x, y)=c_1$ și $\psi(x, y)=c_2$ de caracteristice distincte, o ecuație parabolică are o singură familie $\varphi(x, y)=c_1$ de caracteristice, iar pentru ecuația eliptică curbele caracteristice sînt imaginare. Ecuațiile liniare (2) se mai numesc și ecuațiile fizicii matematice.

3.2. ECUAȚIA LUI LAPLACE. PROBLEMELE LUI DIRICHLET ȘI NEUMANN

După cum am văzut, forma canonică a unei ecuații eliptice este:

$$u_{xx}+u_{yy}+a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u=f(x, y), \tag{24}$$

unde coeficienții a, b, c și f sînt funcții continui într-un domeniu D din planul xOy. Dacă coeficienții sînt constanți, ecuația se mai poate încă simplifica, printr-o schimbare de funcție necunoscută. Anume, să punem $u=v\,exp(\lambda x+\mu y)$ și să luăm v noua funcție necunoscută. Vom găsi prin derivare că:

$$u=(v_x+\lambda v)e^{\lambda x+\mu y},\qquad u_y=(v_y+\mu v)e^{\lambda x+\mu y} \tag{25}$$

$$u_x=(v_{xx}+2\lambda v_x+\lambda^2 v)e^{\lambda x+\mu y},\qquad u_{yy}=(v_{yy}+2\mu v_y+\mu^2 v)e^{\lambda x+\mu y}$$

și prin înlocuire în (24), după simplificarea cu factorul comun $exp\,(\lambda x+\mu y)\neq 0$, se obține:

$$v_{xx}+v_{yy}+(2\lambda+a)v_x+(2\mu+b)v_y+(\lambda^2+\mu^2+\lambda a+\mu b+c)v= \tag{26}$$

$$=f_1(x, y).$$

Dacă luăm $\lambda=-a/2$ și $\mu=-b/2$, se ajunge la

$$v_{xx}+v_{yy}+kv=f_1,\qquad k=c-\frac{a^2+b^2}{4}, \tag{27}$$

care poate fi considerată cea mai simplă formă canonică a ecuației eliptice cu coeficienți constanți

Expresia $u_{xx}+u_{yy}$ se notează cu Δu și se numește laplacianul funcției $u=u(x, y)$. Cea mai simplă ecuație eliptică

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{28}$$

se numește ecuația lui Laplace (omogenă), iar orice soluție a ei se numește funcție armonică în domeniul respectiv D

Dacă luăm drept D discul de rază a cu centrul în origine și notăm cu C circumferința de rază a care-l limitează, atunci problema găsirii unei funcții $u=u(P)$, pentru care:

$$\Delta u(P)=0,\qquad P\in D \tag{29}$$

$$u(P)=f(P),\qquad P\in C,$$

unde $f=f(P)$ este o funcție continuă dată, definită într-o vecinătate a curbei C, se numește „problema lui Dirichlet pentru cerc".

Trecînd la coordonate polare în plan $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ ne propunem să arătăm că soluția problemei formulate este dată de:

$$u(\rho,\theta)=\frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(t)\,dt}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2},\quad 0\leqslant\rho<a, \tag{30}$$

în care $g(t)=f(a\cos t,\ a\sin t)$ este continuă. Vom folosi metoda Fourier de separare a variabilelor și expresia laplacianului în coordonate polare

$$\Delta u=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta},\quad \rho>0. \tag{31}$$

Problema (29) poate fi reformulată astfel: să se afle $u=u(\rho,\theta)$ pentru care:

$$\begin{gathered}u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0,\qquad \rho\in(0,a)\\ u(a,\theta)=g(\theta),\qquad \theta\in(0,2\pi).\end{gathered} \tag{32}$$

Funcția $g=g(\theta)$ este continuă și 2π — periodică. Conținutul problemei lui Dirichlet poate fi redat astfel: să se afle o funcție armonică în interiorul cercului, care ia valori prescrise pe circumferință. Căutăm soluții particulare de forma:

$$u(\rho,\theta)=R(\rho)T(\theta), \tag{33}$$

în care funcțiile R și T trebuie determinate. După derivare, înlocuire în (32) și separarea variabilelor, se ajunge la

$$\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=\lambda^2=\text{constant}, \tag{34}$$

sau, în formă echivalentă

$$\begin{gathered}T''(\theta)+\lambda^2T(\theta)=0\\ \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda^2R(\rho)=0.\end{gathered} \tag{35}$$

Deoarece din prima ecuație (35) găsim $T(\theta)=A\cos\lambda\theta+B\sin\lambda\theta$, pentru a avea funcții cu perioada 2π în raport cu θ,

vom da lui λ pe rînd valorile 0, 1, 2, 3, ... Pentru $\lambda=n=$natural, găsim că soluția generală a celei de a doua ecuații (35), care este de tip Euler, este dată de

$$R_n(\rho)=C\rho^n+D\rho^{-n}, \tag{36}$$

unde C și D sînt constante arbitrare. Deoarece ρ^{-n} nu este continuă pentru $\rho=0$, vom lua $D=0$. Dacă dăm lui C valoarea 1, putem spune că $R_n(\rho)=\rho^n$, $n=$natural. Pentru $\lambda=0$, ecuația în ρ are soluția particulară $R_0(\rho)\equiv1$. În concluzie, pentru fiecare $n=$natural, avem soluția particulară.

$$u_n(\rho,\theta)=\rho^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta), \tag{37}$$

în timp ce pentru $n=0$, avem soluția:

$$u_0(\rho,\theta)=A_0=\text{constant}. \tag{38}$$

Vom căuta soluția problemei (32) în forma unei serii

$$u(\rho,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta), \tag{39}$$

în care coeficienții trebuie astfel determinați, încît seria să poată fi derivată termen cu termen de două ori în raport cu ρ sau cu θ și bineînțeles, să fie satisfăcută condiția la limită $u(a,\theta)=g(\theta)$. Dacă așa ceva este posibil, atunci A_n și B_n se determină în mod unic căci făcînd în (39) $\rho=a$, găsim:

$$g(\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}a^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),\quad \theta\in(0,2\pi), \tag{40}$$

de unde deducem:

$$\begin{gathered}A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)\,d\theta,\quad A_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}g(\theta)\cos n\theta\,d\theta,\\ B_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}g(\theta)\sin n\theta\,d\theta.\end{gathered} \tag{41}$$

Introducînd aceste valori în (39), găsim

$$(42)\quad u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cdot\int_0^{2\pi} g(t)\cos n(\theta-t)\,dt$$

şi avînd în vedere că pentru $\rho<a$, seria

$$(43)\quad \frac{1}{2}g(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n g(t)\cos n(\theta-t),\quad \theta=\text{fixat}$$

este uniform convergentă pentru $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, putem spune că suma integralelor este egală cu integrala sumei, deci

$$(44)\quad u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\theta-t)\right]g(t)\,dt,\quad 0\leqslant\rho<a,$$

de unde, în urma unui calcul elementar, se ajunge la formula (30), zisă a lui Poisson. Avem de justificat că în adevăr $u=u(\rho,\theta)$ astfel găsit verifică toate condiţiile cerute. În ceea ce priveşte prima condiţie (32), este suficient să se constate că funcţia

$$(45)\quad v(\rho,\theta)=\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2},\quad t=\text{fixat}$$

este armonică pentru $\rho<a$, ceea ce se poate face calculînd efectiv derivatele. Derivînd în (30) sub semnul integralei, obţinem că $u=u(\rho,\theta)$ este armonică pentru $\rho<a$, adică în interiorul circumferinţei de rază a. Să arătăm acum că funcţia u dată de (30) satisface şi condiţia la limită

$$(46)\quad \lim_{\substack{\rho\to a\\ \theta\to a}} u(\rho,\theta)=g(\alpha),\quad \alpha\in(0,2\pi),$$

adică poate fi prelungită prin continuitate pe discul închis $\overline{D}=D\cup C$, cu păstrarea egalităţii $u(P)=f(P)$ pentru $P\in C$. În acest scop ne vom folosi de egalitatea

$$(47)\quad \frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}=1,\quad 0\leqslant\rho<a,$$

unde $\theta=$fixat în $[0,2\pi]$. Pentru deducerea lui (47), plecăm de la

$$(48)\quad \frac{1}{2}\,\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\theta-t),$$

în care ρ şi θ sînt fixaţi, $\rho<a$ şi $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Seria precedentă converge uniform pentru $t\in[0,2\pi]$ şi prin integrarea termen cu termen, se obţine (47). Vom putea scrie acum

$$u(\rho,\theta)-g(\alpha)=\frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\left\{\int_{|t-\alpha|<\delta}\frac{(g(t)-g(\alpha))\,dt}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}+\right.$$

$$(49)\quad \left.+\int_{|t-\alpha|\geqslant\delta}\frac{(g(t)-g(\alpha))\,dt}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}\right\},$$

unde $\delta>0$ este un număr suficient de mic. Numărul $\alpha\in[0,2\pi]$ fiind fixat, putem face $|g(t)-g(\alpha)|<\varepsilon/2$ dacă $|t-\alpha|<\delta(\varepsilon)$, deoarece g este continuă. Ţinînd seama şi de (47), rezultă

$$(50)\quad \left|\frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\int_{|t-\alpha|<\delta}\frac{(g(t)-g(\alpha))\,dt}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

dacă luăm aici $\delta=\delta(\varepsilon)$. Cu acest $\delta>0$ fixat, să evaluăm acum cealaltă integrală din relaţia (49). Deoarece există $M>0$ încît $|g(t)|\leqslant M$ pentru $t\in[0,2\pi]$, este evident că:

$$\left|\frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\int_{|t-\alpha|\geqslant\delta}\frac{(g(t)-g(\alpha))\,dt}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}\right|\leqslant$$

$$(51)\quad \leqslant\frac{M(a^2-\rho^2)}{\pi}\int_{|t-\alpha|\geqslant\delta}\frac{dt}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}.$$

În figura care urmează, P este punctul de coordonate carteziene $(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$, OP_1 şi OP_2 razele care fac unghiul $\delta/2$ cu OP, iar OP_3 şi OP_4 razele care fac unghiul δ cu OP.

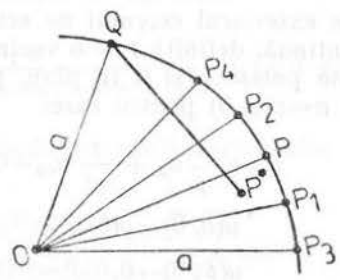

Fig. 3.1

Q este un punct pentru care $|t-\alpha| \geq \delta$, t fiind unghiul care-l face raza OQ cu direcția pozitivă a axei Ox, iar P^* este un punct de coordonate polare ρ și θ. Se observă că

$$a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2=\overline{P^*Q}^2 \tag{52}$$

și că lungimea segmentului P^*Q rămîne superioară unui număr $d_0>0$, dacă impunem lui P^* condiția că se află în sectorul determinat de razele OP_1 și OP_2. Din (51) rezultă atunci că membrul doi al acestei inegalități este majorat de cantitatea $2M(a^2-\rho^2)/d_0^2$, care poate fi făcută $<\varepsilon/2$, cu condiția ca ρ să fie suficient de aproape de a, adică $a-\rho<\delta_1(\varepsilon)$. În concluzie, putem spune că

$$|u(P^*)-u(P)|=|u(\rho,\theta)-g(\alpha)|<\varepsilon, \tag{53}$$

dacă $a-\rho<\delta_1(\varepsilon)$ și $|\theta-\alpha|<\delta_2(\varepsilon)=\delta(\varepsilon)/2$, ceea ce este echivalent cu (46), deoarece $\varepsilon>0$ a fost luat arbitrar. Mai rămîne de arătat unicitatea problemei lui Dirichlet (29). Aceasta rezultă din faptul că dacă $v=v(\rho,\theta)$ este o altă soluție, diferența $w(\rho,\theta)=u(\rho,\theta)-v(\rho,\theta)$ este o funcție armonică în D, continuă în $\overline{D}$ și care se anulează pe frontiera C. După cum este bine cunoscut, de aici decurge $w(P)\equiv 0$ în $\overline{D}$, adică avem unicitate.

Să arătăm cum poate fi rezolvată problema lui Dirichlet pentru exteriorul cercului de rază a cu centrul în origine. Mai exact, căutăm o funcție $u=u(P)$ de clasă C^2 în exteriorul cercului, care să admită prelungire continuă pe circumferința C, adică

$$\begin{aligned} &\Delta u(P)=0, && P\in\widetilde{D}\\ &u(P)=f(P), && P\in C\\ &u(P)\to 0, && \text{dacă } P\to\infty, \end{aligned} \tag{54}$$

unde $\widetilde{D}$ este exteriorul cercului de ecuație $x^2+y^2=a^2$, iar f este o funcție continuă, definită într-o vecinătate a lui C. Dacă trecem la coordonate polare ρ și θ în plan, problema revine la găsirea unei funcții $u=u(\rho,\theta)$ pentru care:

$$\begin{aligned} &u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0, && \rho>a\\ &u(a,\theta)=g(\theta), && \theta\in(0,2\pi)\\ &u(\rho,\theta)\to 0, && \text{dacă } \rho\to\infty, \end{aligned} \tag{55}$$

unde funcția continuă și periodică g este dată de relația $g(\theta)=f(a\cos\theta, a\sin\theta)$. Căutînd soluții particulare de forma $u=R(\rho)T(\theta)$, concluziile (34), (35) și (36) rămîn valabile. Vom lua în (36) $C=0$ și $D=1$, astfel că acum soluțiile particulare vor fi:

$$u_n(\rho,\theta)=\rho^{-n}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),\quad u_0(\rho,\theta)=A_0=\text{const.} \tag{56}$$

Scriind soluția căutată u în forma

$$u(\rho,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{-n}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta), \tag{57}$$

și făcînd aici $\rho=a$, vom obține:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)\,d\theta,\quad A_n=\frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \tag{58}$$

$$B_n=\frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)\sin n\theta\,d\theta,$$

pentru orice $n=$natural. Înlocuind valorile coeficienților în (57) și judecînd la fel ca în cazul problemei interioare pentru cerc, ajungem la concluzia că

$$u(\rho,\theta)=\frac{\rho^2-a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(t)\,dt}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2},\quad \rho>a \tag{59}$$

este soluția unică a problemei (54). Pentru a arăta că funcția $u=u(\rho,\theta)$ satisface condiția la limită $u(P)=f(P)$ pentru $P\in C$, ne vom folosi de data aceasta de egalitatea

$$\frac{\rho^2-a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}=1 \text{ pentru } \rho>a. \tag{60}$$

Să rezolvăm prin metoda separării variabilelor și problema lui Neumann pentru cerc

$$\begin{aligned} &\Delta u(P)=0, && P\in D\\ &\frac{\partial u}{\partial n}(P)=f(P), && P\in C, \end{aligned} \tag{61}$$

unde f este o funcție continuă dată, definită într-o vecinătate a circumferinței C. Prin $\partial u/\partial n$ am notat derivata funcției u în direcția orientată $\mathbf{n}$=versorul normalei exterioare la curba C. Trecînd la coordonate polare și căutînd soluții particulare de forma $u=R(\rho)T(\theta)$ regăsim funcțiile (37) și (38). Vom scrie soluția lui (61) în forma cunoscută (39) și vom observa că pe circumferința C, derivata normală a lui $u=u(\rho, \theta)$ coincide de fapt cu derivata parțială $\partial u/\partial \rho$. Prin derivarea lui (39) în raport cu ρ, găsim:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{62}$$

și dacă facem aici $\rho=a$, obținem

$$g(\theta)= \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad \theta\in(0, 2\pi), \tag{63}$$

unde evident că s-a notat $g(\theta)=f(a\cos\theta, a\sin\theta)$. Pentru ca această funcție continuă și periodică să nu aibă termen liber în dezvoltarea Fourier, așa cum reiese din (63), se impune condiția de compatibilitate

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{a}\int_C f(P)\mathrm{d}s = 0. \tag{64}$$

Din (63) vom găsi

$$na^{n-1}A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\, \mathrm{d}\theta, \quad na^{n-1}B_n = \int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta\, \mathrm{d}\theta, \tag{65}$$

pentru orice n=natural, adică A_n și B_n se determină univoc. Introducînd aceste valori în (39), ajungem la concluzia că soluția lui (61) este

$$u(\rho, \theta)=A_0 + \frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\theta-t)\right] g(t)\mathrm{d}t, \tag{66}$$

unde ρ și θ sînt coordonatele polare ale unui punct din D. Pentru a calcula suma seriei de sub integrală, notăm provizoriu $\rho/a=\lambda$ și $\theta-t=\alpha$ și observăm că:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\lambda^n \cos n\alpha\right)'_{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n \cos n\alpha = \frac{\cos\alpha-\lambda}{1-2\lambda\cos\alpha+\lambda^2}\,; \tag{67}$$

Prin integrare în raport cu λ, vom găsi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\lambda^n \cos n\alpha = -\frac{1}{2}\ln(1-2\lambda\cos\alpha+\lambda^2)+c, \tag{68}$$

dar deoarece pentru $\lambda=0$ suma seriei este nulă, rezultă $c=0$. Deci putem scrie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\theta-t) = -\frac{1}{2}\ln\frac{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}{a^2} = \tag{69}$$

$$= \ln a + \ln\frac{1}{\sqrt{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}}$$

și din (66) rezultă atunci că soluția problemei lui Neumann pentru cerc este dată de:

$$u(\rho, \theta)=a_0+\frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\ln\frac{1}{\sqrt{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}}\,\mathrm{d}t, \tag{70}$$

unde a_0 este o constantă arbitrară. Această egalitate este numită uneori formula lui Dini.

Dacă P este punctul de coordonate polare ρ și θ, iar Q este punctul curent de pe cercul C, astfel că raza OQ face unghiul t cu direcția pozitivă a axei Ox

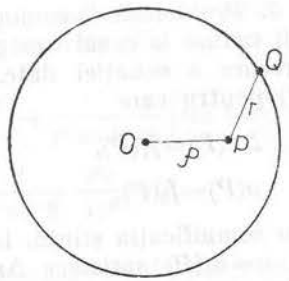

Fig. 3.2

atunci, dacă notăm cu r lungimea segmentului PQ, observăm că

$$\sqrt{a^2-2a\rho\cos(\theta-t)+\rho^2} = |PQ| = r, \tag{71}$$

astfel că formula (70) poate fi transcrisă precum urmează

$$(72)\qquad u(\rho,\theta)=a_0+\frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\ln\frac{1}{r}\,dt=a_0+\frac{1}{\pi}\int_C f(Q)\ln\frac{1}{r}\,ds,$$

unde $a_0=$const. arbitrară, iar $ds=$ elementul de arc pe cercul C Faptul că funcţia $u=u(\rho,\theta)$ dată de (72) este armonică în interiorul cercului C este cu totul evident: este suficient să observăm că $\ln(1/r)$ este armonică în orice domeniu din plan care nu conţine punctul $P(\rho,\theta)$ şi că avem voie să derivăm în raport cu ρ sau cu θ sub semnul integralei. Mai greu este să justificăm că derivata normală a lui u admite prelungire continuă pe $\overline{D}$, astfel încît să avem $\partial u/\partial n=f$ pe circumferinţa C.

Observaţia 1. În rezolvarea celor două probleme clasice de care ne-am ocupat aici (Dirichlet şi Neumann), faptul că, odată găsită forma soluţiei, trebuia să justificăm că în adevăr aceasta satisface toate condiţiile cerute, provenea de acolo că o parte din raţionamentele bazate pe folosirea seriilor trigonometrice aveau caracter formal.

Observaţia 2. Se poate vedea uşor, datorită posibilităţii de a deriva sub semnul integralei în raport cu ρ sau cu θ ori de cîte ori vrem, că funcţiice armonice $u=u(\rho,\theta)$ date de formulele (30), (59) şi (72) au derivate parţiale continui de orice ordin în domeniul în care sînt definite. Aceasta este una din proprietăţile remarcabile ale soluţiilor ecuaţiei lui Laplace $\Delta u=0$.

Observaţia 3. Problemele neomogene de tip Dirichlet sau Neumann pot fi reduse la cazul omogen, prin găsirea unei soluţii particulare oarecare a ecuaţiei date. Mai precis, să căutăm o funcţie $u=u(P)$ pentru care

$$(73)\qquad \begin{aligned} &\Delta u(P)=f_1(P), && P\in D\\ &u(P)=f_2(P), && P\in C, \end{aligned}$$

unde D şi C au semnificaţia ştiută, iar f_1 şi f_2 sînt două funcţii continui. Dacă $u=u_0(P)$ satisface $\Delta u_0=f_1$, punînd $u=u_0+v$ şi luînd $v=$funcţia necunoscută, ajungem la problema cunoscută

$$(74)\qquad \begin{aligned} &\Delta v(P)=0, && P\in D\\ &v(P)=f(P), && P\in C, \end{aligned}$$

în care $f=f_2-u_0$. În multe cazuri concrete, forma lui f_1 sugerează cum trebuie căutată soluţia particulară u_0.

Exemplu. Să se afle o soluţie particulară a ecuaţiei $\Delta u=2xy$. Vom căuta $u_0=u_0(x,y)$ în forma unui polinom de gradul patru; se poate lua $u_0=(1/6)(x^3y+xy^3)$.

Observaţia 4. Probleme de tip Dirichlet sau Neumann se pot pune pentru un domeniu D oarecare, mărginit de o curbă închisă C, dar rezolvarea lor este mai dificilă decît în cazul cînd C este un cerc. Există şi o altă metodă de abordare a acestor probleme, dar nu ne propunem să o prezentăm aici.

3.3. ECUAŢIA ŞI POLINOAMELE LUI LEGENDRE

Dacă funcţia u depinde de trei variabile independente, ecuaţia lui Laplace ia forma:

$$(75)\qquad \Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0.$$

O funcţie $u=u(x,y,z)$ de clasă C^2 în domeniul D, adică cu derivate parţiale de ordinul unu şi doi continui în D, care satisface (75), se numeşte funcţie armonică de trei variabile independente. În coordonate sferice, r, θ, φ, ecuaţia (75) ia forma

$$(76)\qquad \Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\\ +\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0.$$

Reamintim semnificaţia coordonatelor sferice: r este distanţa de la punctul curent P la originea O a reperului, θ este unghiul făcut de vectorul **OP** cu direcţia pozitivă a axei Oz; φ este unghiul făcut de proiecţia razei vectoare OP în planul xOy cu direcţia pozitivă a axei Ox.

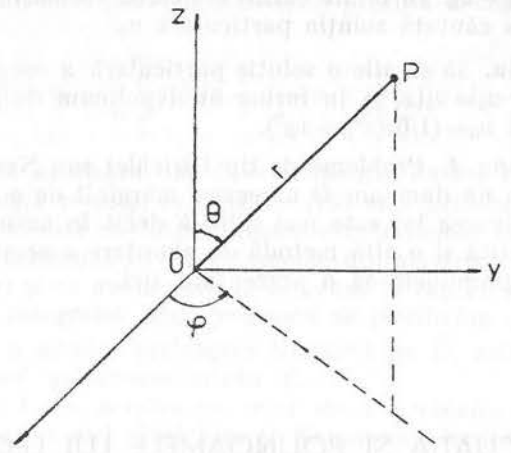

Fig. 3.3

Legătura între coordonatele carteziene și cele sferice este dată de

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta, \tag{77}$$

unde $r\geqslant 0$, $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi)$. Dacă vom căuta o soluție a ecuației (76) care să nu depindă de φ, adică o soluție de forma $u=u(r,\theta)$, ea va satisface

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0. \tag{78}$$

Punînd aici $u=R(r)T(\theta)$, unde R și T trebuie determinate, găsim după separare condițiile

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2R'(r))=\lambda,\quad\frac{1}{T(\theta)\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta T'(\theta))=-\lambda, \tag{79}$$

unde λ este o constantă. Acestea pot fi scrise în forma echivalentă

$$r^2R''(r)+2rR'(r)-\lambda R(r)=0,\quad T''(\theta)\sin\theta+T'(\theta)\cos\theta+\lambda T(\theta)\sin\theta=0. \tag{80}$$

Dacă impunem primei ecuații (80) să admită soluția particulară $R(r)=r^n$, găsim pentru constanta λ valoarea $n(n+1)$. În acest

caz, soluția generală a primei ecuații (80), care este de tip Euler, e dată de

$$R(r)=Ar^n+Br^{-(n+1)}, \tag{81}$$

în care A și B sînt constante arbitrare. A doua ecuație (80) în care $\lambda=n(n+1)$ devine, în urma schimbării de variabilă independentă $\cos\theta=t=$ noua variabilă

$$(1-t^2)P''(t)-2tP'(t)+n(n+1)P(t)=0,\quad -1<t<1, \tag{82}$$

unde $P(\cos\theta)=T(\theta)$. Ecuația diferențială (82) pe care o satisface funcția $P=P(t)$ se numește ecuația lui Legendre. Pentru rezolvarea ecuației Laplace $\Delta u=0$, se impune deci studierea ecuației lui Legendre (82).

Definiția 3.1. Polinoamele

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n],\quad n=1,2,3,\ldots$$
$$P_0(x)\equiv 1 \tag{83}$$

se numesc polinoamele lui Legendre.

Propoziția 3.1. *Funcțiile $y=P_n(x)$ satisfac ecuația diferențială Legendre*

$$(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+n(n+1)y(x)=0\quad n=0,1,2,\ldots \tag{84}$$

Demonstrație. În cazul $n=0$, afirmația este banală. Dacă $n=$ număr natural, notăm $(x^2-1)^n=Q(x)$ și observăm că acesta este un polinom de gradul $2n$, pentru care

$$Q'(x)=2nx(x^2-1)^{n-1}=\frac{2nx}{x^2-1}Q(x). \tag{85}$$

Derivînd de $n+1$ ori după regula lui Leibniz identitatea

$$(x^2-1)Q'(x)=2nxQ(x) \tag{86}$$

vom găsi

$$(1-x^2)Q^{(n+2)}(x)-2xQ^{(n+1)}(x)+n(n+1)Q^{(n)}(x)=0. \tag{87}$$

Dacă punem $z(x)=Q^{(n)}(x)$, se vede că avem

$$(1-x^2)z''(x)-2xz'(x)+n(n+1)z(x)=0, \tag{88}$$

și deoarece $y(x)=P_n(x)$ diferă numai printr-un factor constant de $z(x)$, demonstrația este terminată.

Observație. Prezența factorului $1/(2^n n!)$ în expresia lui $P_n(x)$ se justifică prin îndeplinirea condiției $P_n(1)=1$, care se poate verifica fără dificultate.

Propoziția 3.2. *Orice soluție a ecuației* (84), *mărginită pentru* $x=1$, *diferă printr-o constantă multiplicativă de* $P_n(x)$. *Altfel spus,* $y=P_n(x)$ *este singura soluție a lui* (84), *pentru care* $y(1)=1$.

Demonstrație. Ecuația (84) poate fi scrisă în forma:

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0, \tag{89}$$

unde $p(x)=-2x/(1-x^2)$, $q(x)=n(n+1)/(1-x^2)$. Dacă $y=y_1(x)$ este o soluție particulară a sa, diferită de zero într-o vecinătate a punctului $x=1$, punînd $y(x)=y_1(x)z(x)$ și luînd $z=z(x)$ drept funcție necunoscută, găsim:

$$y'=y_1'z+y_1z', \quad y''=y_1''z+2y_1'z'+y_1z'', \tag{90}$$

care introduse în (89), ne duc la concluzia

$$y_1z''+(2y_1'+py_1)z'=0 \quad \text{sau} \quad \frac{z''}{z'}=-2\frac{y_1'}{y_1}-p, \tag{91}$$

de unde, prin integrare

$$z'(x)=c_2\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}, \qquad c_2=\text{const.} \tag{92}$$

O nouă integrare ne dă valoarea lui $z(x)$ și ținînd seama de substituția $y(x)=y_1(x)z(x)$, găsim

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}\,dx, \tag{93}$$

unde c_1 și c_2 sînt constante arbitrare. Luînd $y_1(x)=P_n(x)$ și avînd în vedere că $p(x)=-2x/(1-x^2)$, putem scrie

$$y(x)=c_1P_n(x)+c_2P_n(x)\int\frac{dx}{(1-x^2)P_n^2(x)}. \tag{94}$$

Deoarece $x=1$ este rădăcină simplă a numitorului fracției rationale de sub integrala precedentă, există descompunerea

$$\frac{1}{(1-x^2)P_n^2(x)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\ldots, \qquad A\neq 0, \tag{95}$$

unde termenii nescriși nu au singularitate pentru $x=1$. Prin integrare găsim:

$$y(x)=c_1P_n(x)+c_2P_n(x)[A\ln|x-1|+\varphi(x)], \quad \varphi(1)=\text{finit}. \tag{96}$$

Dacă limita lui $y(x)$ este finită pentru $x\to 1$, rezultă cu necesitate $c_2=0$ și deci $y(x)=c_1P_n(x)$, adică tocmai ceea ce trebuie demonstrat.

Definiția 3.2. Funcția

$$W(x,h)=\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=(1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{97}$$

se numește funcția generatoare a polinoamelor lui Legendre. Denumirea se justifică prin următoarea

Propoziția 3.3 *Pentru* $|x|\leqslant 1$ *și* $|h|<1$ *are loc dezvoltarea:*

$$W(x,h)=P_0(x)+hP_1(x)+\ldots+h^nP_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(x). \tag{98}$$

Demonstrație. Pentru x fixat din $(-1, 1)$, dezvoltăm pe $W(x, h)$ în serie Taylor în jurul punctului $h=0$

$$W(x,h)=y_0(x)+hy_1(x)+\ldots+h^ny_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}h^ny_n(x), \tag{99}$$

coeficienții puterilor lui h depinzînd de variabila x. Este ușor de văzut că această dezvoltare este valabilă pentru $|h|<1$, căci funcția de la numitor are două rădăcini pe cercul unitate din planul variabilei complexe h și anume $h_1=x+j\sqrt{1-x^2}$ și $h_2=x-j\sqrt{1-x^2}$. Făcînd în (99) $x=1$, găsim

$$\frac{1}{1-h}=y_0(1)+hy_1(1)+\ldots+h^ny_n(1)+\ldots, \quad |h|<1, \tag{100}$$

de unde, în baza unicității dezvoltării în serie de puteri, tragem concluzia că:

$$y_n(1)=1, \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{101}$$

Pe de altă parte, funcția W satisface relația

$$h^2\frac{\partial^2W}{\partial h^2}+(1-x^2)\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+2h\frac{\partial W}{\partial h}-2x\frac{\partial W}{\partial x}=0. \tag{102}$$

Dacă vom calcula derivatele lui W folosind dezvoltarea (99), vom găsi:

$$(103)\qquad \frac{\partial W}{\partial h}=\sum_{n=1}^{\infty} nh^{n-1}y_n(x),\quad \frac{\partial W}{\partial x}=\sum_{n=0}^{\infty} h^n y_n'(x),$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial h^2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)h^{n-2}y_n(x),\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} h^n y_n''(x).$$

Din ultimele două relații obținem

$$(104)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}[(1-x^2)y_n''(x)-2xy_n'(x)+n(n+1)y_n(x)]h^n\equiv 0,\quad |h|<1,$$

de unde rezultă că funcția $y=y_n(x)$ verifică ecuația (84). Deoarece avem și $y_n(1)=1$, din propoziția 3.2 rezultă $y_n(x)=P_n(x)$ pentru $n=0, 1, 2, \ldots$ Aceasta înseamnă că (98) este adevărată, Q.E.D.

Propoziția 3.4. *Polinoamele lui Legendre satisfac relația de recurență*

$$(105)\qquad (n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),\quad n=1, 2, \ldots$$

Demonstrație. Deoarece

$$(106)\qquad \frac{\partial W}{\partial h}=-\frac{1}{2}(1-2xh+h^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2h)=\frac{(x-h)W(x,h)}{1-2xh+h^2},$$

putem scrie

$$(107)\qquad (1-2xh+h^2)\frac{\partial W}{\partial h}+(h-x)W(x,h)=0.$$

Folosind dezvoltarea în serie (98), relația precedentă poate fi scrisă în forma:

$$(108)\qquad (1-2xh+h^2)[P_1(x)+2hP_2(x)+\ldots+nh^{n-1}P_n(x)+\ldots]+$$
$$+(h-x)[P_0(x)+hP_1(x)+\ldots+h^nP_n(x)+\ldots]\equiv 0.$$

Egalînd cu zero termenul liber (fără h) al sumei de mai sus, găsim prima relație de recurență și anume $P_1(x)=xP_0(x)$. Pentru $n=$ număr natural, anulînd coeficientul lui h^n, găsim

$$(109)\qquad (n+1)P_{n+1}(x)-2nxP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)-xP_n(x)+$$
$$+P_{n-1}(x)=0,$$

care este echivalentă cu (105). Demonstrația este terminată.

Folosind relația (105), se poate calcula orice $P_n(x)$, plecînd de la cele cu indicele mai mic. Astfel, vom găsi:

$$(110)\qquad P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\ \text{etc.}$$

Propoziția 3.5. *$P_n(x)$ este un polinom de gradul n, avînd toate rădăcinile reale și distincte, cuprinse în intervalul $(-1, 1)$.*

Demonstrație. Prima afirmație rezultă direct din modul cum au fost definite aceste polinoame — formula (83). Folosind din nou notația $Q(x)=(x^2-1)^n$, este suficient să arătăm că $Q^n(x)$ are n rădăcini distincte în $(-1, 1)$. Această afirmație rezultă din aplicarea repetată a teoremei lui Rolle funcției $Q(x)$ și derivatelor sale, după ce se observă în prealabil că $x=1$ și $x=-1$ sînt rădăcini de multiplicitate n pentru funcția $Q(x)$.

Propoziția 3.6. *$P_n(x)$ este ortogonal pe toate polinoamele de grad mai mic decît n, adică*

$$(111)\qquad \int_{-1}^{1} P_n(x)Q_m(x)\mathrm{d}x=0,$$

oricare ar fi polinomul $Q_m(x)$ de grad mai mic decît n.

Demonstrație. O integrare repetată prin părți, ne duce la concluzia

$$(112)\qquad \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\,Q_m(x)\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}Q_m(x)\mathrm{d}x.$$

Or, este evident că în ipoteza $m<n$, derivata de ordinul n a polinomului $Q_m(x)$ este identic nulă și deci demonstrația este terminată.

Propoziția 3.7. *Polinoamele Legendre satisfac relația de ortogonalitate*

$$(113)\qquad \int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

Demonstrație. Dacă $m<n$, ținînd seama de (111) rezultă că integrala (113) este nulă. Dacă $m>n$, ajungem la aceeași concluzie. Să presupunem că $m=n$ și să notăm cu A_n coeficientul termenului de grad maxim din $P_n(x)$, adică:

$$P_n(x)=A_nx^n+\ldots \tag{114}$$

Din relația de recurență (105), obținem $(n+1)A_{n+1}=(2n+1)A_n$ sau

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}=\frac{2n-1}{n}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots \tag{115}$$

Luînd polinomul $R=R(x)$ dat prin egalitatea

$$R(x)=P_n(x)-\frac{A_n}{A_{n-1}}xP_{n-1}(x)=P_n(x)-\frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x), \tag{116}$$

vedem că are gradul mai mic decît n, deci

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)\left[P_n(x)-\frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x)\right]dx=0, \qquad n=\text{natural}. \tag{117}$$

Ultima egalitate poate fi transcrisă în forma

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_{n-1}(x)dx. \tag{118}$$

Dar din aceeași formulă (105), găsim că

$$xP_n(x)=\frac{(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)}{2n+1}, \qquad n=\text{natural} \tag{119}$$

și substituind în (118), obținem formula

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)dx. \tag{120}$$

Prin aplicarea repetată a acestei formule găsim:

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2n-1}{2n+1}\frac{2n-3}{2n-1}\cdots\frac{5}{7}\,\frac{3}{5}\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}P_0^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}, \tag{121}$$

valabilă pentru orice n natural. Demonstrația este completă.

Propoziția 3.8. *Polinoamele lui Legendre admit reprezentarea integrală*

$$P_n(z)=\frac{1}{2^{n+1}\pi j}\int_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, \qquad n=0, 1, 2, \ldots \tag{122}$$

unde C este un contur simplu închis, care înconjură punctul z.

Demonstrație. Se știe că dacă $f=f(z)$ este olomorfă în tot planul, are loc formula

$$f_{(n)}^{(z)}=\frac{n!}{2\pi j}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}, \qquad n=0, 1, 2, \ldots \tag{123}$$

unde C este o curbă simplă închisă, care înconjoară punctul z. Aplicînd această formulă funcției $f(z)=(z^2-1)^n$ și înmulțind relația obținută cu $1/(2^{n+1}n!)$, obținem tocmai relația (122).

Exercițiu. Presupunem că funcția continuă $f=f(x)$ poate fi dezvoltată în serie uniform convergentă după polinoamele lui Legendre pe intervalul $[-1, 1]$

$$f(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+\ldots+c_nP_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x). \tag{124}$$

Să se arate că coeficienții c_n sînt unic determinați și să se afle valoarea lor.

Rezolvare. Prin înmulțirea seriei (124) cu $P_n(x)$ ($n=$fixat) se obține tot o serie uniform convergentă pe $[-1, 1]$. Integrînd-o termen cu termen și ținînd seama de (113), găsim

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx=c_n\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=c_n\cdot\frac{2}{2n+1}, \qquad n=0, 1, 2, \ldots \tag{125}$$

Prin urmare avem

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx, \qquad n=0, 1, 2, \ldots \tag{126}$$

de unde rezultă afirmația făcută.

Să revenim la problema integrării ecuației lui Laplace $\Delta u=0$, pentru care se caută o soluție particulară de forma $u=R(r)T(\theta)$, adică independentă de coordonata sferică φ. Expresia funcției

$R=R(r)$ este dată de (81), în timp ce pentru $T=T(\theta)$ rezultă acum că putem lua $T(\theta)=P_n(\cos\theta)$. Mai precis, pentru fiecare $n\geqslant 0$ întreg avem o soluție particulară a ecuației $\Delta u=0$ de forma

$$u_n(r,\theta)=[a_n r^n+b_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta), \tag{127}$$

unde a_n și b_n sînt constante arbitrare reale. Dacă vrem să rezolvăm problema lui Dirichlet relativă la sfera de rază a

$$\begin{aligned} &\Delta u(P)=0, && P\in \text{interiorul sferei } S\\ &u(P)=f(\cos\theta), && P\in \text{sfera } S, \end{aligned} \tag{128}$$

unde P este punctul curent de coordonate sferice r, θ, φ iar f este o funcție continuă dată, vom căuta soluția $u=u(r,\theta)$ în forma unei serii

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{129}$$

în care coeficienții a_n trebuie determinați. Făcînd aici $r=a$, găsim

$$f(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n P_n(\cos\theta), \quad 0<\theta<\pi, \tag{130}$$

care revine la condiția

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n P_n(x), \quad -1<x<1. \tag{131}$$

Ținînd seama de (126), putem scrie

$$a_n=\frac{2n+1}{2a^n}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{132}$$

Putem sintetiza cele expuse aici, în forma următoare:

Teorema 3.1. *Soluția problemei interioare Dirichlet* (128), *în care f este o funcție continuă cunoscută, este dată de seria*

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta), \tag{133}$$

unde coeficienții c_n se calculează cu formula (126).

Dacă $f=f(x)$ este un polinom de gradul N, toți coeficienții c_n cu indicele $n>N$ sînt egali cu 0, în baza Propoziției 3.6. Prin urmare, putem enunța următorul

Corolar. *Dacă $f=f(x)$ este un polinom de gradul N, soluția problemei interioare* (128) *este dată de:*

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)\cdot\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx. \tag{134}$$

Problema lui Dirichlet relativă la exteriorul sferei de rază a cu centrul în origine se rezolvă asemănător. Vom căuta soluția problemei

$$\begin{aligned} &\Delta u(P)=0, && P\in \text{exterior } S\\ &u(P)=f(\cos\theta), && P\in S\\ &u(P)\to 0, && P\to\infty, \end{aligned} \tag{135}$$

unde f este o funcție continuă dată, în forma

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \tag{136}$$

unde coeficienții b_n trebuie determinați. Făcînd aici $r=a$, găsim după înlocuirea lui $\cos\theta$ cu x

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n a^{-(n+1)} P_n(x), \quad -1<x<1, \tag{137}$$

de unde, ținînd seama de (126), se obține

$$b_n=\frac{(2n+1)a^{n+1}}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{138}$$

Putem rezuma cele expuse aici, în forma următoare:

Teorema 3.2. *Soluția problemei exterioare Dirichlet* (135), *în care f este o funcție continuă cunoscută, este dată de seria*

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta), \tag{139}$$

unde coeficienții c_n se calculează cu formula (126).

Corolar. *Dacă $f=f(x)$ este un polinom de gradul N, soluția problemei exterioare* (135) *este*

$$(140)\qquad u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)\cdot\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx.$$

Problema lui Neumann relativă la sfera S

$$(141)\qquad \Delta u(P)=0,\qquad P\in \text{interior } S$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(P)=f(\cos\theta),\quad P\in S,$$

poate fi rezolvată în același mod. Căutînd soluția $u=u(r,\theta)$ în forma (129), găsim prin derivare parțială în raport cu r

$$(142)\qquad \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nr^{n-1}P_n(\cos\theta)$$

și observînd că pe suprafața sferei derivata lui u în direcția normalei exterioare $\mathbf{n}$ coincide cu derivata parțială $\partial u/\partial r$, trebuie să impunem condiția:

$$(143)\qquad f(\cos\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}na_na^{n-1}P_n(\cos\theta),\quad 0<\theta<\pi,$$

care ne duce la concluzia

$$(144)\qquad a_n=\frac{2n+1}{2na^{n-1}}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx,\quad n=1,2,\ldots$$

O condiție necesară ca (143) să fie posibilă este ca coeficientul lui $P_0(x)$ în dezvoltarea lui $f(x)$ după polinoamele lui Legendre să fie nul. Acesta se reduce la $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$ și exprimă faptul că integrala funcției $f(\cos\theta)$ pe suprafața sferei S este nulă. În adevăr

$$(145)\qquad \iint_S f(\cos\theta)\,d\sigma=a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=2\pi a\int_{-1}^{1}f(x)dx=0.$$

Avînd în vedere cele expuse aici putem enunța:

Teorema 3.3. *Soluția problemei Neumann* (141) *în care f este o funcție continuă cu* $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$, *este dată de seria:*

$$(146)\qquad u(r,\theta)=a_0+a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}c_n\left(\frac{r}{a}\right)^nP_n(\cos\theta),$$

unde coeficienții c_n se calculează cu formula (126), *iar a_0 este o constantă arbitrară.*

Corolar. *Dacă $f=f(x)$ este un polinom de gradul N, avînd integrala nulă pe $[-1,1]$, soluția problemei* (141) *este*

$$(147)\qquad u(r,\theta)=a_0+a\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{2n}\left(\frac{r}{a}\right)^nP_n(\cos\theta)\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx,$$

unde a_0 este o constantă arbitrară.

Exemplu. Să se spună dacă problema lui Neumann pentru sfera de rază a, cu condiția $\partial u/\partial n=2\cos\theta-4\cos^3\theta$ pe suprafața sferei, este rezolvabilă și în caz afirmativ să se afle soluția.

Rezolvare. În acest caz $f(x)=2x-4x^3$ este un polinom de gradul trei. Se vede că $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$, deci există soluție, dată de 147) în care $N=3$. Se găsește că:

$$(148)\qquad \int_{-1}^{1}f(x)P_1(x)dx=-\frac{4}{15},\quad \int_{-1}^{1}f(x)P_2(x)dx=0,$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_3(x)dx=-\frac{16}{35}$$

și dacă se ține seama de (110), se obține soluția

$$(149)\qquad u(r,\theta)=a_0-\frac{2r\cos\theta}{5}-\frac{4r^3(5\cos^3\theta-3\cos\theta)}{15a^2},$$

în care a_0 este o constantă arbitrară.

3.4. ECUAȚIA LUI LAPLACE ȘI FUNCȚIILE SFERICE

Folosind proprietățile funcțiilor armonice de trei variabile, se poate demonstra că soluția unică a problemei interioare Dirichlet, relativă la sfera S de rază a

$$\Delta u(P)=0, \qquad P\in \text{interior } S \tag{150}$$
$$u(P)=f(P), \qquad P\in S,$$

în care $f=f(P)$ este o funcție continuă dată, definită într-o vecinătate a suprafeței S, se exprimă în fiecare punct din interiorul sferei prin formula

$$u(P)=u(r_0,\ \theta_0,\ \varphi_0)=\frac{a^2-r^2}{4\pi a}\iint\limits_S \frac{f(Q)\,d\sigma}{\rho^3}, \tag{151}$$

unde ρ este lungimea vectorului $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{PQ}=(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$, iar Q este punctul curent de pe suprafața S. Dacă luăm pentru sferă reprezentarea parametrică obișnuită, coordonatele lui Q satisfac relațiile $x=a\sin\theta\cos\varphi$, $y=a\sin\theta\sin\varphi$, $z=a\cos\theta$, iar elementul de arie este $d\sigma=a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$. În același timp, dacă notăm cu γ unghiul razelor vectoare $\mathbf{OQ}$ și $\mathbf{OP}$, avem în mod evident $\rho^2=a^2-2ar_0\cos\gamma+r^2$, așa că putem transcrie (151) în forma

$$u(r_0,\ \theta_0,\ \varphi_0)=\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\theta,\ \varphi)\,\frac{a^2-r_0^2}{(a^2-2ar_0\cos\gamma+r_0^2)^{3/2}}\,d\theta\,d\varphi, \tag{152}$$

dacă folosim notația $f(a\sin\theta\cos\varphi,\ a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta)=g(\theta,\ \varphi)$. Relația precedentă este analogul formulei Poisson (30) pentru cerc. Putem calcula valoarea $\cos\gamma$, dacă observăm că

$$\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{OP}=xx_0+yy_0+zz_0=ar_0\cos\gamma \tag{153}$$

și ținem seama de legătura dintre coordonatele carteziene și cele sferice. Găsim prin simplă înlocuire că

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0). \tag{154}$$

Formula (152) nu este însă prea comodă pentru calcule. O altă metodă de rezolvare, în cazul cînd funcția g depinde numai

de $\cos\theta$, am văzut că se bazează pe folosirea polinoamelor Legendre și a fost expusă în secțiunea precedentă. Pentru cazul general, adică pentru cazul cînd g depinde de ambele variabile θ și φ, se impune folosirea altei metode, pe care o expunem acum.

Dacă vrem să aflăm pentru ecuația $\Delta u=0$ o soluție de forma $u=R(r)Y(\theta,\ \varphi)$, după derivare, înlocuire în ecuație și separarea variabilelor, ajungem la concluzia că

$$\frac{r^2R''(r)+2rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}}{Y(\theta,\ \varphi)}=\lambda, \tag{155}$$

unde λ este constantă. Din relația precedentă rezultă

$$r^2R''(r)+2rR'(r)-\lambda R(r)=0$$
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y(\theta,\ \varphi)=0. \tag{156}$$

Dacă vrem ca prima ecuație (156) să admită soluția particulară r^n, trebuie să luăm, după cum am mai văzut, $\lambda=n(n+1)$. Dacă în a doua ecuație (156) punem $Y(\theta,\ \varphi)=T(\theta)S(\varphi)$ și facem din nou separarea variabilelor, găsim

$$\frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta T'(\theta))+n(n+1)T(\theta)}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}T(\theta)}=-\frac{S''(\varphi)}{S(\varphi)}=m^2=\text{constant}, \tag{157}$$

sau în altă formă

$$S''(\varphi)+m^2S(\varphi)=0$$
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta T'(\theta))+\left[n+(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]T(\theta)=0. \tag{158}$$

Prima ecuație (158) are soluția generală $S(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi$, unde A și B sînt constante arbitrare. Deoarece vrem ca această funcție să fie 2π — periodică, vom lua pentru constanta m valorile $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. În raționamentul de față $n=$ întreg $\geqslant 0$ este fixat. Dînd lui m una din valorile asupra cărora ne-am înțeles, vom observa în același timp că a doua ecuație (158) este asemănătoare cu a doua ecuație (80). Dacă punem $T(\theta)=P(\cos\theta)$, vom ajunge la ecuația diferențială

$$(1-t^2)P''(t)-2tP'(t)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-t^2}\right]P(t)=0, \tag{159}$$

despre care se poate arăta, prin verificare directă, că are soluția particulară

$$(160)\qquad P_{nm}(t)=(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)=(1-t^2)^{\frac{m}{2}}P_n^{(m)}(t),$$

în care $P_n(t)$ este polinomul lui Legendre de gradul n, iar $P_n^{(m)}(t)$ este derivata de ordinul m a acestui polinom. Funcția (160), care pentru $m=$ număr par este tot un polinom, se numește „funcție asociată" a lui Legendre. În cazul $m=0$, este evident că $P_{n0}(t)=P_n(t)$, adică funcția asociată corespunzătoare coincide cu polinomul $P_m(t)$. De asemenea, în cazul $m=n$, se vede că $P_{nn}(t)$ diferă numai printr-o constantă multiplicativă de $(1-t^2)^{n/2}$. Pentru $m>n$, funcțiile asociate (160) sînt identic nule. Am ajuns la concluzia că pentru $n\geqslant 0$ întreg fixat, există $2n+1$ soluții particulare ale celei de a doua ecuații (156) în care $\lambda=n(n+1)$, și anume

$$(161)\qquad \begin{gathered} P_n(\cos\theta),\ \cos\varphi P_{n1}(\cos\theta),\ \sin\varphi P_{n1}(\cos\theta),\ \cos 2\varphi P_{n2}(\cos\theta),\\ \sin 2\varphi P_{n2}(\cos\theta),\ \ldots,\ \cos n\varphi P_{nn}(\cos\theta),\ \sin n\varphi P_{nn}(\cos\theta), \end{gathered}$$

pe care le-am obținut dînd în (158) lui m pe rînd valorile $0, 1, 2, \ldots, n$ și luînd pentru $S(\varphi)$ expresia $\cos m\varphi$ sau $\sin n\varphi$, iar pentru $T(\theta)$ valoarea $P_{nm}(\cos\theta)$. Deoarece ecuația cu derivate parțiale la care satisface funcția $Y=Y(\theta,\ \varphi)$ este liniară, rezultă că

$$(162)\qquad Y_n(\theta,\ \varphi)=a_{n0}P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}(a_{nk}\cos k\varphi+b_{nk}\sin k\varphi)\,P_{nk}(\cos\theta),$$

în care a_{nk} și b_{nk} sînt constante reale arbitrare este soluție a celei de a doua ecuații (156) în care $\lambda=n(n+1)$.

Definiția 3.3. Funcția $Y_n(\theta,\ \varphi)$ dată de (162) se numește funcție sferică de ordinul n.

Pentru fiecare $n\geqslant 0$ întreg, am găsit deci soluții particulare pentru ecuația $\Delta u=0$, de forma

$$(163)\qquad u_n(r,\ \theta,\ \varphi)=R_n(r)\,Y_n(\theta,\ \varphi)=(A_nr^n+B_nr^{-(n+1)})\,Y_n(\theta,\ \varphi),$$

în care A_n și B_n sînt constante reale. Numărul constantelor arbitrare în soluția (163) este de fapt $2n+3$.

Funcțiile sferice $Y_n(\theta,\ \varphi)$ au un rol important în rezolvarea ecuației lui Laplace. Vom scrie pe larg expresia lor, în cazurile $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

$$Y_0(\theta,\ \varphi)=a_{00}P_0(\cos\theta)=a_{00}$$

$$\begin{aligned} Y_1(\theta,\ \varphi)&=a_{10}P_1(\cos\theta)+(a_{11}\cos\varphi+b_{11}\sin\varphi)P_{11}(\cos\theta)=\\ &=a_{10}\cos\theta+(a_{11}\cos\varphi+b_{11}\sin\varphi)\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2(\theta,\ \varphi)&=a_{20}P_2(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{2}(a_{2k}\cos k\varphi+b_{2k}\sin k\varphi)P_{2k}(\cos\theta)=\\ &=a_{20}\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)+(a_{21}\cos\varphi+b_{21}\sin\varphi)\,3\sin\theta\cos\theta+\\ &\quad+(a_{22}\cos 2\varphi+b_{22}\sin 2\varphi)\,3\sin^2\theta \end{aligned}\qquad (164)$$

$$\begin{aligned} Y_3(\theta,\ \varphi)&=a_{30}P_3(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{3}(a_{3k}\cos k\varphi+b_{3k}\sin k\varphi)P_{3k}(\cos\theta)=\\ &=a_{30}\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)+\\ &\quad+(a_{31}\cos\varphi+b_{31}\sin\varphi)\frac{1}{2}\sin\theta(15\cos^2\theta-3)+\\ &\quad+(a_{32}\cos 2\varphi+b_{32}\sin 2\varphi)15\sin^2\theta\cos\theta+(a_{33}\cos 3\varphi+\\ &\quad+b_{33}\sin 3\varphi)15\sin^3\theta. \end{aligned}$$

Avînd în vedere că sinusul și cosinusul arcelor multiple se exprimă prin sinusul și cosinusul arcului simplu, putem spune că din punct de vedere algebric, funcțiile sferice $Y_n(\theta,\ \varphi)$ sînt polinoame în variabilele $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\varphi$ și $\sin\varphi$ sau mai precis, polinoame de o formă specială, după cum se vede din relația precedentă.

Se poate vedea că funcțiile sferice au proprietatea de ortogonalitate; mai exact, dacă $m\neq n$ sînt întregi $\geqslant 0$, atunci

$$(165)\qquad \iint_S Y_m(\theta,\ \varphi)\,Y_n(\theta,\ \varphi)\,d\sigma=0,$$

oricare ar fi valorile coeficienților care intră în expresia celor două funcții. Ne putem convinge de aceasta, luînd funcțiile armonice

$$(166)\qquad u=r^nY_n(\theta,\ \varphi)\ \text{ și }\ v=r^mY_m(\theta,\ \varphi)$$

și scriind formula a doua a lui Green

$$(167)\qquad \iint_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=\iiint_{int\,S}(u\Delta v-v\Delta u)\,d\omega=0.$$

Ţinînd seama că pe sfera S derivatele normale ale lui u şi v coincid cu derivatele parţiale în raport cu r, obţinem din ultimele două relaţii că

$$(168)\qquad (m-n)a^{m+n-1}\iint_S Y_m(\theta,\varphi)Y_n(\theta,\varphi)\mathrm{d}\sigma=0$$

şi deoarece $m-n\neq 0$, rezultă (165). Scrisă în altă formă, condiţia de ortogonalitate devine

$$(169)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_m(\theta,\varphi)Y_n(\theta,\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0,\quad m\neq n.$$

De asemenea, se observă că funcţiile sferice (161), care intră în componenţa funcţiei sferice generale $Y_n(\theta,\varphi)$, formează un sistem de $2n+1$ funcţii ortogonale între ele. În adevăr

$$(170)\qquad \iint_S \cos k_1\varphi P_{nk_1}(\cos\theta)\cos k_2\varphi P_{nk_2}(\cos\theta)\mathrm{d}\sigma=$$

$$=a^2\Big(\int_0^{2\pi}\cos k_1\varphi\cos k_2\varphi\mathrm{d}\varphi\Big)\cdot\Big(\int_0^{\pi}P_{nk_1}(\cos\theta)P_{nk_2}(\cos\theta)\mathrm{d}\theta\Big)=0,\ k_1\neq k_2,$$

deoarece prima integrală din dreapta este nulă. La fel se arată şi ortogonalitatea oricărei perechi de forma $\cos k_1\varphi P_{nk_1}(\cos\theta)$ şi $\sin k_2\varphi P_{nk_2}(\cos\theta)$, oricare ar fi k_1 şi k_2 avînd una din valorile $0, 1, 2, \ldots, n$. Concluzia care se desprinde din cele spuse aici, este că sistemul funcţiilor sferice

(171) $\{P_n(\cos\theta),\ \cos k\varphi P_{nk}(\cos\theta),\ \sin k\varphi P_{nk}(\cos\theta)\}$, $0\leqslant k\leqslant n<\infty$, este ortogonal faţă de produsul scalar constînd din integrala produsului obişnuit pe sfera S. Pentru a putea calcula coeficienţii dezvoltării unei funcţii date $g=g(\theta,\varphi)$ după funcţiile sistemului (171), se impune şi calcularea integralei pătratelor acestor funcţii pe sfera S. Astfel, vom avea

$$(172)\qquad \iint_S P_n^2(\cos\theta)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_n^2(\cos\theta)a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=$$

$$=2\pi a^2\int_{-1}^{1}P_n^2(t)\mathrm{d}t=\frac{4\pi a^2}{2n+1},$$

dacă ţinem seama de (121). Mai departe, putem scrie

$$\iint_S[\cos k\varphi P_{nk}(\cos\theta)]^2\mathrm{d}\sigma=a^2\Big(\int_0^{2\pi}\cos^2 k\varphi\mathrm{d}\varphi\Big)\Big(\int_0^{\pi}P_{nk}^2(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\Big)=$$

$$(173)\qquad =\pi a^2\int_{-1}^{1}P_{nk}^2(t)\mathrm{d}t$$

şi în mod asemănător

$$(174)\qquad \iint_S[\sin k\varphi P_{nk}(\cos\theta)]^2\mathrm{d}\sigma=\pi a^2\int_{-1}^{1}P_{nk}^2(t)\mathrm{d}t,$$

oricare ar fi n şi k întregi, $0<k\leqslant n$. Totul se reduce deci la aflarea integralei definite din partea dreaptă a formulelor (173) şi (174). În acest scop, să plecăm de la ecuaţia lui Legendre (84), pe care să o derivăm de k ori; obţinem

$$(175)\qquad (1-x^2)y^{(k+2)}(x)-2(k+1)y^{(k+1)}(x)+$$
$$+[n(n+1)-k(k+1)]y^{(k)}(x)=0.$$

Prin înmulţirea cu factorul $(1-x^2)^k$, ecuaţia precedentă poate fi scrisă sub forma

$$(176)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)^{k+1}y^{(k+1)}(x)]=-[n(n+1)-k(k+1)](1-x^2)^k y^k(x).$$

Deoarece $y(x)=P_n(x)$ verifică ecuaţia (84), din (176) găsim relaţia evidentă

$$(177)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)^k P_n^{(k)}(x)]=-[n(n+1)-k(k-1)](1-x^2)^{k-1}P_n^{(k-1)}(x),$$

valabilă pentru orice $k=$natural. Revenind la integrala care ne interesează, avem

$$(178)\qquad \int_{-1}^{1}P_{nk}^2(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^k P_n^{(k)}(x)P_n^{(k)}(x)\mathrm{d}x$$

şi o integrare prin părţi ne duce la concluzia

$$(179)\qquad \int_{-1}^{1}P_{nk}^2(x)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}P_n^{(k-1)}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)^k P_n^{(k)}(x)]\mathrm{d}x,$$

care, în combinaţie cu (177), va antrena că

$$(180)\qquad \int_{-1}^{1}P_{nk}^2(x)\mathrm{d}x=(n+k)(n-k+1)\int_{-1}^{1}P_{n,k-1}^2(x)\mathrm{d}x.$$

Aplicînd în mod repetat formula de recurență găsită și ținînd seama că $P_{n0}(x)=P_n(x)$, obținem în definitiv

$$\int_{-1}^{1} P_{nk}^2(x)\,dx=(n+k)(n-k+1)(n+k-1)(n-k+2)\ldots(n+1)n\frac{2}{2n+1}=$$

(181)

$$=\frac{(n+k)!}{n!}\,\frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{2}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

valabilă pentru $0\leqslant k\leqslant n<\infty$. Presupunînd acum posibilă dezvoltarea unei funcții $g=g(\theta,\varphi)$ în serie de funcții sferice

(182) $$g(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(a_{nk}\cos k\varphi+b_{nk}\sin k\varphi)P_{nk}(\cos\theta)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi)$$

și admițînd că prin înmulțirea lui (182) cu oricare din funcțiile sferice (171), se obține o serie ce poate fi integrată termen cu termen pe sfera S, ajungem la concluzia că a_{nk} și b_{nk} sînt unic determinați. În adevăr, ținînd seama de ortogonalitatea sistemului (171) și de formulele (172), (173), (174) și (181), obținem

$$a_{nk}=\frac{1}{N_{nk}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}g(\theta,\varphi)P_{nk}(\cos\theta)\cos k\varphi\sin\theta\,d\theta d\varphi$$

(183)

$$b_{nk}=\frac{1}{N_{nk}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}g(\theta,\varphi)P_{nk}(\cos\theta)\sin k\varphi\sin\theta\,d\theta d\varphi,$$

unde numitorii N_{nk} au valoarea

(184) $$N_{nk}=\frac{2\pi\varepsilon_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!},\qquad \varepsilon_k=\begin{cases}2, & \text{pentru } k=0\\ 1, & \text{pentru } k>0.\end{cases}$$

Prima aplicație a funcțiilor sferice constă în rezolvarea problemei Dirichlet pentru sferă (150). Căutînd soluția u în forma unei serii de soluții particulare (163) în care $A_n=1/a^n$ și $B_n=0$, adică punînd

(185) $$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta,\varphi),$$

unde coeficienții care intră în expresia lui $Y_n(\theta,\varphi)$ trebuie determinați, găsim pentru $t=a$ condiția

(186) $$u(a,\theta,\varphi)=f(a\sin\theta\cos\varphi,\ a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta)=$$

$$=g(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi).$$

Deoarece funcția $g(\theta,\varphi)$ este dată, coeficienții a_{nk} și b_{nk} se determină în mod unic cu formulele (183) + (184), adică funcțiile $Y_n(\theta,\varphi)$ se determină în mod unic pentru toate valorile întregi $\geqslant 0$ ale indicelui n. Putem rezuma cele expuse astfel

Teorema 3.4. *Soluția problemei interioare* (150), *în care* $f=f(P)$ *este o funcție continuă dată, se exprimă prin seria*

(187) $$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta,\varphi),$$

în care funcțiile sferice $Y_n(\theta,\varphi)$ *se determină în mod unic din condiția* (186).

În anumite cazuri simple, în (187) există numai un număr finit de funcții sferice neidentic nule, astfel că soluția u se scrie ca o sumă finită și nu ca o serie.

Exemplu. Să se afle o funcție armonică în interiorul sferei unitate, care ia valoarea $\cos(2\varphi+\pi/3)\sin^2\theta$ pe suprafața sferei.

Rezolvare. În cazul de față, $g(\theta,\varphi)=\cos(2\varphi+\pi/3)\sin^2\theta=$ $=(1/2)(\cos 2\varphi-\sqrt{3}\sin 2\varphi)\sin^2\theta$. Dacă ne amintim de funcția sferică $Y_2(\theta,\varphi)$

(188) $$Y_2(\theta,\varphi)=a_{20}\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)+(a_{21}\cos\varphi+$$

$$+b_{21}\sin\varphi)3\sin\theta\cos\theta+(a_{22}\cos 2\varphi+b_{22}\sin 2\varphi)3\sin^2\theta,$$

vedem că este suficient să luăm $a_{20}=a_{21}=b_{21}=0$, $a_{22}=1/6$ și $b_{22}=-\sqrt{3}/6$ pentru a obține pe $g(\theta,\varphi)$. Celelalte funcții sferice care apar în dezvoltatrea (186) le luăm identic nule. În baza unicității dezvoltării, conchidem că

(189) $$\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta=Y_2(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}(\cos 2\varphi-\sqrt{3}\sin 2\varphi)\sin^2\theta.$$

Prin urmare, soluția căutată este dată de

(190) $$u(r,\theta,\varphi)=r^2Y_2(\theta,\varphi)=r^2\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta.$$

Altă aplicație a funcțiilor sferice constă în rezolvarea problemei exterioare pentru sferă

$$\begin{aligned} &\Delta u(P)=0, && P\in\text{exterior } S\\ &u(P)=f(P), && P\in S\\ &u(P)\to 0, && \text{dacă } P\to\infty, \end{aligned} \tag{191}$$

în care $f=f(P)$ este o funcție continuă dată, definită într-o vecinătate a suprafeței S. Trecînd la coordonate sferice și păstrînd pentru $g(\theta, \varphi)$ aceeași semnificație ca și în cazul precedent, putem reformula problema astfel

$$\begin{aligned} &\Delta u=0, && \text{în exteriorul sferei } S\\ &u(a, \theta, \varphi)=g(\theta, \varphi), && \theta\in(0, \pi),\ \varphi\in(0, 2,\pi)\\ &u(r, \theta, \varphi)\to 0, && \text{dacă } r\to\infty. \end{aligned} \tag{192}$$

Căutînd soluția u în forma unei serii de soluții particulare (163) în care $A_n=0$ și $B_n=a^{n+1}$, vom avea

$$u(r, \theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}Y_n(\theta, \varphi),\quad r>a, \tag{193}$$

unde coeficienții care intră în expresia lui $Y_n(\theta, \varphi)$ trebuie astfel determinați, încît să fie satisfăcută și condiția la limită. Făcînd $r=a$, vom găsi

$$g(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta, \varphi), \tag{194}$$

deci coeficienții sînt dați de (183) și (184) ca și în cazul precedent. Putem rezuma cele spuse în forma următoare

Teorema 3.5. *Soluția problemei exterioare* (192) *se exprimă prin seria* (193), *în care funcțiile sferice* $Y_n(\theta, \varphi)$ *se determină în mod unic din condiția* (194).

Exemplu. Să se afle o funcție armonică în exteriorul sferei de rază a cu centrul în origine, astfel încît $u(a, \theta, \varphi)=\sin^3\theta\cos\theta\cos(3\varphi+\pi/4)$.

Rezolvare. În acest caz

$$g(\theta, \varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 3\varphi-\sin 3\varphi)\sin^3\theta\cos\theta, \tag{195}$$

dar observăm că această expresie nu intră în componența funcției $Y_3(\theta, \varphi)$ dată de (164). Deoarece $Y_4(\theta, \varphi)$ conține un termen de forma

$$(a_{43}\cos 3\varphi+b_{43}\sin 3\varphi)P_{43}(\cos\theta), \tag{196}$$

ne putem întreba care este valoarea lui $P_{43}(\cos\theta)$. Deoarece $P_{43}(x)=(1-x)^{3/2}\cdot 105\,x$, rezultă $P_{43}(\cos\theta)=105\sin^3\theta\cos\theta$. Putem deci afirma că $g(\theta, \varphi)=Y_4(\theta, \varphi)$, dacă în expresia lui Y_4 luăm $a_{43}=\sqrt{2}/210$, $b_{43}=-\sqrt{2}/210$, iar ceilalți coeficienți îi luăm egali cu zero. Rezultă că

$$u(r,\ \theta, \varphi)=\left(\frac{a}{r}\right)^5 Y_4(\theta, \varphi)=\left(\frac{a}{r}\right)^5\sin^3\theta\cos\theta\cos\left(3\varphi+\frac{\pi}{4}\right) \tag{197}$$

este soluția unică a problemei puse.

Problema lui Neumann pentru sferă, adică găsirea unei funcții u care satisface

$$\begin{aligned} &\Delta u(P)=0, && P\in\text{interior } S\\ &\frac{\partial u}{\partial n}(P)=f(P), && P\in S, \end{aligned} \tag{198}$$

în care $f=f(P)$ este o funcție continuă dată, definită într-o vecinătate a suprafeței S, se poate rezolva, căutînd soluția u în forma

$$u(r,\ \theta, \varphi)=c+a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \varphi) \tag{199}$$

și observînd că pe sferă derivata lui u în direcția normalei exterioare coincide cu derivata parțială $\partial u/\partial r$. Dacă notăm ca și în cazurile precedente $f(P)=g(\theta,\ \varphi)$ pentru $P\in S$, trebuie să avem

$$g(\theta, \varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(\theta, \varphi), \tag{200}$$

din care se determină în mod unic funcțiile sferice $Y_n(\theta,\ \varphi)$. Pentru ca această dezvoltare să fie posibilă, se impune ca

$$\iint_S g(\theta, \varphi)\,d\sigma=0 \text{ sau } \iint_S f(P)\,d\sigma=0. \tag{201}$$

Putem rezuma cele spuse enunțînd

Teorema 3.6. *Soluția problemei interioare* (198) *se exprimă prin seria* (199), *în care c este o constantă arbitrară, iar funcțiile sferice* $Y_n(\theta, \varphi)$ *se determină în mod unic din condiția* (200).

EXERCIȚII

1) Să se afle soluția ecuației $\Delta u=0$ în domeniul $0<x<a$, $0<y<\infty$. cu condițiile la limită

$$u(0, y)=0,\ u(a, y)=0,\ u(x, 0)=A\left(1-\frac{x}{a}\right),\ u(x, \infty)=0.$$

Rezolvare. Vom separa variabilele scriind $u=X(x)Y(y)$ și vom ajunge la concluzia $X''(x)+\lambda^2X(x)=0$, $Y''(y)-\lambda^2Y(y)=0$. Impunînd condițiile $X(0)=X(a)=0$, găsim

$$\lambda=\lambda_n=\frac{n\pi}{a} \text{ și } X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a},\ n=\text{natural}.$$

Soluțiile particulare sînt

$$u_n(x, y)=\left(a_ne^{-\frac{n\pi y}{a}}+b_ne^{\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a},\ n=\text{natural},$$

cu a_n și b_n constante arbitrare. Căutînd soluția problemei în forma $u(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x, y)$ și folosind celelalte condiții la limită, se ajunge la concluzia că

$$u(x, y)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi y}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

2) Să se afle soluția ecuației

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=-2,$$

în dreptunghiul $0<x<a$, $-b/2<y<b/2$, dacă această soluție se anulează pe frontiera dreptunghiului.

Rezolvare. Căutînd o soluție particulară de forma $u_0=Ax^2+Bx+C$, vom găsi $A=-1$, iar B și C arbitrari. Impunem con-

diția ca această soluție să se anuleze pe laturile verticale și găsim $B=a$, $C=0$. Prin urmare, avem soluția particulară $u_0=x(a-x)$ care se anulează pentru $x=0$ și $x=a$. Făcînd substituția $u=u_0+v$, ajungem la concluzia că v trebuie să satisfacă ecuația $\Delta v=0$ și condițiile la limită

$$v(0, y)=0,\ v(a, y)=0,\ v\left(x, \frac{b}{2}\right)=x^2-ax,\ v\left(x, -\frac{b}{2}\right)=x^2-ax.$$

Aplicînd metoda separării variabilelor și căutînd pe v în forma unei serii de soluții particulare $v_n(x, y)$, vom găsi că soluția (unică) a problemei inițiale este

$$u(x, y)=x(a-x)-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi b}{2a}}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi x}{a}$$

3. Să se arate că funcția

$$u(x, y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t-x)^2+y^2},\quad y>0$$

este soluția problemei

$$\begin{cases}\Delta u(x, y)=0, & y>0\\ u(x, 0)=f(x), & x=\text{real},\end{cases}$$

în care $f=f(x)$ este o funcție continuă și mărginită pe axa reală.

Rezolvare. Integrala generalizată care dă valoarea funcției u, cît și cele obținute din ea prin derivarea parțială în raport cu x sau în raport cu y, converg uniform în orice parte compactă a semiplanului superior $y>0$. Vom putea deci scrie

$$u_{xx}+u_{yy}=\Delta u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\left(\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\right)f(t)dt=0,$$

deoarece funcția $y/((t-x)^2+y^2)$ este armonică în raport cu variabilele x și y. Se poate verifica că $|u|$ este mărginită de aceeași con-

stantă care majorează $|f|$. Pentru a arăta că este îndeplinită și condiția la limită

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}} u(x, y)=f(x_0),$$

oricare ar fi x_0 real fixat, se poate utiliza egalitatea

$$1=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(t-x)^2+y^2}, \quad y>0 \text{ și } x \text{ real},$$

care ne dă dreptul să scriem

$$u(x, y)-f(x_0)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)-f(x_0)}{(t-x)^2+y^2}\,dt.$$

4) Să se arate că în ipotezele

(i) $f=f(x)$ este continuă pe axa reală și $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=0$.

(ii) există limita finită a lui $(1+x^2)f(x)$ pentru $x\to\pm\infty$,

soluția problemei lui Neumann

$\Delta u=0$ pentru $y>0$, $u_y(x, 0)=f(x)$ pentru x real

este dată de funcția

$$u(x, y)=c+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ln[(t-x)^2+y^2]dt,$$

în care c este o constantă arbitrară. Să se arate că u are limită finită pentru $(x, y)\to\infty$.

Indicație. Dacă se utilizează transformarea conformă $w=(z-j)/(z+j)$ care reprezintă semiplanul superior $y>0$ pe discul $|w|<1$, problema dată se reduce la o problemă Neumann pentru cerc. Plecînd de la această ideie, se poate arăta necesitatea condițiilor (i)+(ii), precum și faptul că soluția $u=u(x, y)$ va avea limita finită dacă $z=x+jy$ se depărtează la infinit, în semiplanul superior. Pentru deducerea rapidă a formulei din enunț vom raționa altfel. În acest scop, observăm că dacă $u=u(x, y)$ este

armonică într-un semiplan, derivata $u_y(x, y)$ are aceeași proprietate. În plus, cunoscînd valoarea acestei derivate pe axa reală, din problema precedentă va rezulta că

$$u_y(x, y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t-x)^2+y^2}, \quad y>0,$$

de unde, în urma unei integrări în raport cu y sub semnul integralei, vom găsi

$$u(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ln[(t-x)^2+y^2]dt+c, \quad y>0.$$

Pe de altă parte, acum se poate verifica în mod riguros că această funcție este armonică în semiplanul $y>0$ și satisface condiția la limită $u_y(x, 0)=f(x)$ pentru $-\infty<x<\infty$.

5) Să se afle o funcție armonică (potențialul, de exemplu) $U=U(x, y)$ în domeniul cuprins între cercurile C_1: $|z-1|=2\sqrt{2}$ și C_2: $|z-2|=3\sqrt{2}$, știind că

$$U(x, y)=0 \text{ pe } C_1 \text{ și } U(x, y)=1 \text{ pe } C_2.$$

Rezolvare. Vom reprezenta conform domeniul dat, pe o coroană cuprinsă între două cercuri concentrice cu centrul în originea din planul w. În acest scop, căutăm o pereche de puncte reale x_1 și x_2, care să fie conjugate în raport cu ambele cercuri C_1 și C_2, adică

$$(x_1-1)(x_2-1)=8, \quad (x_1-2)(x_2-2)=18,$$

ceea ce implică $x_1=-7$ și $x_2=0$. Punînd $w=(z-x_2)/(z-x_1)=z/(z+7)$, se obține o funcție omografică care duce cele două cercuri C_1 și C_2, în două cercuri din planul w cu centrul în $w=0$. Acestea sînt

$$\Gamma_1\colon |w|=\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{și} \quad \Gamma_2\colon |w|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Notînd $w=u+jv$, este evident că funcția U de forma

$$U(x, y)=c_1\ln(u^2+v^2)+c_2=c_1\ln\frac{x^2+y^2}{(x+7)^2+y^2}+c_2$$

este armonică în raport cu variabilele x și y, oricare ar fi constantele reale c_1 și c_2. Pe acestea le vom determina cu ajutorul condi-

ţiilor la limită. Unicitatea soluţiei decurge din faptul că problema este de tip Dirichelt. Soluţia căutată este

$$U(x, y)=\frac{-1}{2\ln\frac{3}{4}}\ln\frac{x^2+y^2}{(x+7)^2+y^2}+\frac{\ln\frac{1}{\sqrt{8}}}{\ln\frac{3}{4}}.$$

6) Să se arate că funcţia

$$u(x, y, z)=\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{f(s, t)\,ds\,dt}{[(s-x)^2+(t-y)+z^2]^{3/2}}, \qquad z>0$$

este soluţia problemei lui Dirichlet pentru semispaţiu

$$\begin{cases}\Delta u(x, y, z)=0, & z>0\\ u(x, y, 0)=f(x, y), & (x, y)\in R^2,\end{cases}$$

în care $f=f(x, y)$ este o funcţie continuă şi mărginită în tot planul.

Indicaţie. Integrala generalizată care dă valoarea funcţiei u, cît şi cele obţinute din ea prin derivarea parţială în raport cu x sau cu y, converg uniform în orice parte compactă a semispaţiului $z>0$. Vom avea deci dreptul să scriem

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\Delta u=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\Delta\left(\frac{z}{[(s-x)^2+(t-y)^2+z^2]^{3/2}}\right)f(s, t)\,ds\,dt$$

şi deoarece funcţia $z/[(s-x)^2+(t-y)^2+z^2]^{3/2}$ este armonică în raport cu variabilele x, y şi z după cum se poate constata prin verificare directă, rezultă $\Delta u(x, y, z)=0$ în semispaţiul superior $z>0$. Dacă avem în vedere şi relaţia

$$1=\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{ds\,dt}{[(s-x)^2+(t-y)^2+z^2]^{3/2}}, \qquad z>0,$$

putem uşor arăta că din condiţia $|f(x, y)|\leqslant N$ pentru $(x, y)\in R^2$, rezultă $|u(x, y, z)|\leqslant N$ în tot semispaţiul $z>0$. Pentru a arăta că este îndeplinită şi condiţia la limită

$$u(x, y, z)\to f(x_0, y_0) \text{ cînd } x\to x_0,\ y\to y_0,\ z\to 0,$$

vom scrie

$$u(x, y, z)-f(x_0, y_0)=\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{f(s, t)-f(x_0, y_0)}{[(s-x)^2+(t-y)^2+z^2]^{3/2}}\,ds\,dt.$$

Fie $\varepsilon>0$ dat şi $\delta>0$ astfel încît $|f(s, t)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$ pentru $(s-x_0)^2+(t-y_0)^2<\delta^2$. Notînd cu D_δ discul de rază δ cu centrul în (x_0, y_0) şi scriind că integrala precedentă este egală cu integrala pe D_δ plus integrala pe R^2-D_δ, ajungem la concluzia că

$$|u(x, y, z)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon+\frac{Nz}{\pi}\iint\limits_{R^2-D_\delta}\frac{ds\,dt}{[(s-x)^2+(t-y)^2+z^2]^{3/2}},$$

oricare ar fi (x, y, z) din semispaţiul $z>0$. Impunînd acum punctului (x, y) condiţia ca să rămînă la distanţă mai mică decît $\delta/2$ faţă de (x_0, y_0) şi trecînd în integrala precedentă la coordonate polare ρ şi θ cu centrul în (x, y), vom observa că pentru (s, t) în R^2-D_δ unghiul polar θ ia orice valoare din intervalul $[0, 2\pi)$, în timp ce ρ rămîne superior lui $\delta/2$. Aceasta ne dă dreptul să scriem

$$\iint\limits_{R^2-D_\delta}\frac{ds\,dt}{(s-x)^2+(t-y)^2+z^2]^{3/2}}<2\pi\int\limits_{\delta/2}^{\infty}\frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}=$$

$$=2\pi\left(\frac{\delta^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

pentru (x, y) la distanţă mai mică decît $\delta/2$ faţă de (x_0, y_0) şi oricare ar fi $z>0$.

În concluzie

$$|u(x, y, z)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon+2Nz\left(\frac{\delta^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

dacă $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2/4$, de unde rezultă concluzia dorită.

7) Să se arate că dacă $f=f(x)$ este continuă pe $[-1, 1]$ şi

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx,\ n=0, 1, 2\ldots$$

sînt coeficienţii ei Fourier-Legendre, are loc inegalitatea lui Bessel

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\,c_n^2\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}f^2(x)dx.$$

Rezolvare. Fie n un număr natural fixat și să scriem relația evidentă

$$\int_{-1}^{1}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_kP_k(x)\right]^2\,dx\geqslant 0.$$

Dacă facem ridicarea la pătrat și ținem seama de ortogonalitatea polinoamelor Legendre, rezultă

$$\int_{-1}^{1}f^2(x)dx-2\sum_{k=0}^{n}c_k\cdot\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx+\sum_{k=0}^{n}c_k^2\frac{2}{2k+1}\geqslant 0.$$

Deoarece

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx=\frac{2c_k}{2k+1},\qquad k=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

vom obține din ultimele două relații că

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\,c_k^2\leqslant\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f^2(x)dx.$$

Deoarece această inegalitate are loc pentru orice n=natural, se obține imediat inegalitatea lui Bessel. Rezultă în mod implicit și convergența seriei din partea stîngă a inegalității.

8) Dacă $f=f(x)$ este continuă pe $[-1,\,1]$, să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n+1}\cdot\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx=0.$$

Rezolvare. Din convergența seriei mai sus amintite, rezultă că $c_n/\sqrt{2n+1}\to 0$ pentru $n\to\infty$. Dacă se ține seama de expresia lui c_n, se obține relația dorită.

9) Dacă în punctul fixat A, situat la distanța r_0 față de origine, se află sarcina electrică q, să se exprime potențialul în punctul P, situat la distanța r față de origine. Se va nota cu θ unghiul razelor OA și OP, unde $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

Rezolvare

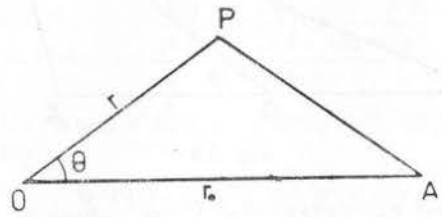

Fig. 3.4

Se știe că potențialul V are valoarea q/AP. Deoarece

$$AP^2=r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta$$

în ipoteza $r<r_0$, raportul $h=r/r_0$ este subunitar, astfel că putem scrie

$$V=\frac{q}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1-2h\cos\theta+h^2}}=\frac{q}{r_0}W(\cos\theta,h),$$

unde $W=W(x,h)$ este funcția generatoare a polinoamelor Legëndre. Folosind dezvoltarea în serie după puterile lui h, găsim

$$V=\frac{q}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(\cos\theta).$$

Este evident că dacă $r>r_0$, notînd $r_0/r=h$ vom putea scrie

$$V=\frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(\cos\theta).$$

10) Dacă în punctele fixate A și B, situate la distanța $2r_0$ unul față de celălalt, se află sarcinile q și respectiv $-q$, să se exprime potențialul în punctul P, situat la distanța r față de mijlocul O al segmentului AB.

Rezolvare

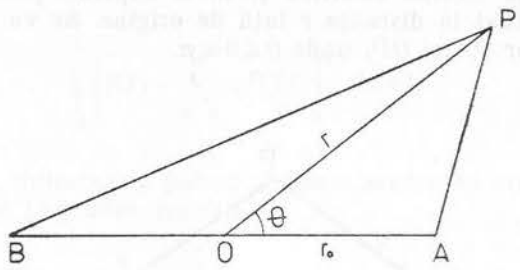

Fig. 3.5

Se știe că în acest caz potențialul V are valoarea

$$V=q\left(\frac{1}{AP}-\frac{1}{BP}\right).$$

Judecînd că în problema precedentă, dacă $r<r_0$ găsim

$$V=\frac{q}{r_0}\left[\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(\cos\theta)-\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(-\cos\theta)\right]=$$

$$=\frac{2q}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}h^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta),$$

unde $h=r/r_0$. Ne-am bazat pe faptul că $P_{2n}(x)$ este o funcție pară, iar $P_{2n+1}(x)$ este impară, după cum se constată imediat prin inducție, folosind formula de recurență (105). Dacă $r>r_0$ și notăm $h=r_0/r$, atunci

$$V=\frac{2q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}h^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta).$$

11) Să se exprime potențialul în punctul P, dacă în punctele A și B sînt plasate sarcini egale cu q (fig. 3.5).

12) Să se găsească soluția ecuației

$$\Delta u-k^2u=0, \qquad (k>0),$$

în interiorul sferei de rază a cu centrul în origine, cu condiția la limită $u(a,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi)$, unde f este o funcție continuă dată.

Rezolvare. Pentru a ne asigura de unicitatea soluției, este suficient să presupunem că problema

$$\Delta v-k^2v=0, \qquad v(a,\theta,\varphi)=0,$$

admite numai soluția banală $v\equiv0$. Scriind $u=R(r)Y(\theta,\varphi)$, vom ajunge la concluzia

$$\frac{(r^2R'(r))'}{R(r)}-k^2r^2=-\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}}{Y\sin\theta}=\lambda=\text{const.}$$

Luînd $\lambda=n(n+1)$ unde n este un întreg $\geqslant0$, obținem de mai sus sistemul următor

$$\begin{cases}r^2R''(r)+2rR'(r)-[k^2r^2+n(n+1)]R(r)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y\sin\theta=0.\end{cases}$$

Ecuația a doua a acestui sistem este verificată de funcția sferică $Y_n(\theta,\varphi)$, în care coeficienții a_{nk} și b_{nk} sînt constante arbitrare. Dacă în prima ecuație punem $R(r)=S(kr)$ și luăm $S=S(x)$ funcția necunoscută, obținem ecuația

$$x^2S''(x)+2xS'(x)-[x^2+n(n+1)]S(x)=0.$$

Făcînd aici substituția $S(x)=T(x)/\sqrt{x}$, găsim pentru $T=T(x)$ ecuația diferențială

$$x^2T''(x)+xT'(x)-\left[x^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]T(x)=0,$$

care admite soluția particulară (finită în origine)

$$T(x)=I_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

Reamintim că prin $I_\nu(x)$ se notează funcția modificată a lui Bessel de speța întîi și de ordinul ν. Putem deci spune că pentru fiecare $n\geqslant0$ întreg, am găsit o soluție particulară a ecuației date și anume:

$$u_n(r,\theta,\varphi)=R_n(r)Y_n(\theta,\varphi), \text{ unde } R_n(r)=\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}.$$

Căutăm soluția problemei în forma

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_n(r)}{R_n(a)}Y_n(\theta,\varphi).$$

Făcînd aici $r=a$ și folosind condiția la limită, găsim

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi);\quad \theta\in(0,\pi),\quad \varphi\in(0,2\pi),$$

din care se determină în mod unic funcțiile sferice $Y_n(\theta,\varphi)$. Trebuie remarcat că funcțiile $R_n(r)$ sînt continui și nu se anulează pentru $r\geqslant 0$.

13) Să se găsească soluția ecuației

$$\Delta u+k^2u=0,\quad (k>0),$$

în interiorul sferei de rază a cu centrul în origine, cu condiția la limită $u(a,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi)$, unde f este o funcție continuă dată.

Indicație. Metoda de rezolvare este identică cu a problemei precedente. Pentru fiecare $n\geqslant 0$ întreg, se va găsi soluția particulară

$$u_n(r,\theta,\varphi)=R_n(r)Y_n(\theta,\varphi),\ \text{unde}\ R_n(r)=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}.$$

Presupunînd că $R_n(a)\neq 0$ pentru orice n (aceasta este o condiție asupra constantei k), vom căuta soluția în forma

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_n(r)}{R_n(a)}Y_n(\theta,\varphi).$$

Ca și în cazul precedent, funcțiile $Y_n(\theta,\varphi)$ se determină în mod unic, folosind condiția la limită.

14) Să se afle soluția ecuației

$$\Delta u-k^2u=0,\quad (k>0),$$

în interiorul sferei de rază a cu centrul în origine, cu condiția la limită $(\partial u/\partial n)(a,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi)$. Caz particular $f=A=$constant.

Rezolvare. Căutăm soluția în forma

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_n(r)}{R'_n(a)}Y_n(\theta,\varphi),$$

unde funcția $R_n(r)$ are aceeași expresie ca în problema (12). Se poate constata că $R'_n(a)\neq 0$, $n=0,1,2,\ldots$ Deoarece derivata normală pe sferă coincide cu derivata parțială în raport cu r, condiția la limită se traduce prin

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi),\quad \theta\in(0,\pi),\quad \varphi\in(0,2\pi),$$

de unde se determină în mod unic funcțiile sferice $Y_n(\theta,\varphi)$.

În cazul particular, $f=A=$constant, soluția este

$$u=A\frac{R_0(r)}{R'_0(a)}=\frac{Aa^2}{r}\frac{\operatorname{sh} kr}{ka\operatorname{ch} ka-\operatorname{sh} ka},\quad 0<r<a.$$

15) Să se afle soluția ecuației interioare pentru sferă

$$\Delta u+k^2u=0,\quad (k>0),$$

cu condiția $(\partial u/\partial n)(a,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi)$. Caz particular $f=A=$constant.

Rezolvare. Căutăm soluția în forma

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_n(r)}{R'_n(a)}Y_n(\theta,\varphi),$$

unde $R_n(r)$ are aceeași expresie ca în problema (13). Funcțiile sferice se află din aceeași condiție ca în problema precedentă.

În cazul particular $f=A=$constant, soluția este

$$u=A\frac{R_0(r)}{R'_0(a)}=\frac{Aa^2}{r}\frac{\sin kr}{ka\cos ka-\sin ka},\quad 0<r<a,$$

Se poate ușor vedea că condiția $R'_n(a)\neq 0$ atrage unele restricții asupra constantelor a și k.

16) Se dă ecuația $\Delta u=q$, în care $q=q(P)$ este o funcție cu derivate parțiale continui în tot spațiul, satisfăcînd majorarea

$$|q(P)|\leqslant\frac{A}{r^{2+\alpha}},\ \text{pentru}\ r>R_0.$$

unde $A>0$ și $0<\alpha<1$ sînt niște constante, iar $r=|\mathbf{OP}|$.

Să se arate că singura soluție $u=u(P)$ pentru care avem

$$|u(P)|<\frac{B}{r^{\lambda}},\ |\operatorname{grad} u(P)|<\frac{B}{r^{1+\lambda}},\ \text{pentru}\ r>R_0.$$

unde $B>0$ și $\lambda>0$ sînt niște constante, este funcția

$$u(P)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{R^3}\frac{q(Q)\,d\omega}{|\mathbf{PQ}|}=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{R^3}\frac{q(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}.$$

Rezolvare. Cnndiția impusă asupra lui $q=q(P)$ garantează convergența integralei din enunț. Considerînd pentru moment punctul $P(x, y, z)$, fixat, îl înconjurăm cu o suprafață închisă Σ, de interior Ω. Aplicînd formula a doua a lui Green funcțiilor $u=u(Q)$ și $v=v(Q)$ unde v este dată de relația $v(Q)=1/|\mathbf{PQ}|$, se obține că

$$u(P)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}v\Delta u\,\mathrm{d}\omega,$$

pentru orice funcție u cu derivate parțiale continui de ordinul unu și doi, în particular și pentru soluția presupusă existentă a ecuației $\Delta u=q$. Luînd drept suprafață Σ sfera S_R cu centrul în origine și de rază $R>R_0$ suficient de mare încît să cuprindă în interior punctul P, din relațiile evidente

$$\left|\iint\limits_{S_R}v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\frac{4\pi R^2B}{(R-r)R^{1+\lambda}},\quad\left|\iint\limits_{S_R}u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\frac{4\pi R^2B}{(R-r)^2R^{\lambda}},$$

deducem că aceste integrale tind la zero cînd $R\to\infty$ și deci avem în mod obligatoriu

$$u(P)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{R^3}\frac{q(Q)}{|\mathbf{PQ}|}\,\mathrm{d}\omega,$$

integrala din dreapta fiind extinsă la tot spațiul. Această reprezentație ne spune că dacă ecuația $\Delta u=q$ are soluție satisfăcînd condițiile cerute, aceasta este unică și dată de formula precedentă. Pe de altă parte, se poate verifica că această funcție este în adevăr soluția căutată a problemei enunțate.

17) Să se găsească o soluție $\mathbf{v}=\mathbf{v}(P)$ definită în tot spațiul, a sistemului

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\mathbf{v}(P)=0\\ \operatorname{div}\mathbf{v}(P)=q(P),\end{cases}$$

în care $q=q(P)$ satisface condițiile din problema precedentă.

Rezolvare. Cîmpul vectorial $\mathbf{v}=\mathbf{v}(P)$ trebuind să fie irotațional în tot spațiul, putem pune $\mathbf{v}(P)=\operatorname{grad}u(P)$. Din a doua ecuație a sistemului, rezultă că funcția $u=u(P)$ trebuie să satisfacă condiția $\Delta u=q$. Ținînd seama de problema precedentă rezultă că o soluție $\mathbf{v}$ a sistemului dat este

$$\mathbf{v}(P)=\operatorname{grad}_P\left(-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{R^3}\frac{q(Q)}{|\mathbf{PQ}|}\,\mathrm{d}\omega\right)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{R^3}\frac{q(Q)\mathbf{PQ}}{|\mathbf{PQ}|^3}\,\mathrm{d}\omega.$$

Dacă facem notația $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{PQ}$, atunci soluțiile problemelor (16) și respectiv (17), pot fi scrise în forma simplificată

$$u(P)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{R^3}\frac{q(Q)}{\rho}\,\mathrm{d}\omega,\quad\mathbf{v}(P)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{R^3}\frac{\boldsymbol{\rho}q(Q)}{\rho^3}\,\mathrm{d}\omega.$$

Vom mai face observația că în timp ce soluția problemei (16) este unică, pentru problema (17) nu avem unicitate, deoarece dacă adunăm $\mathbf{v}$ cu gradientul unei funcții armonice, obținem tot o soluție a aceleiași probleme.

18) Să se găsească o soluție $\mathbf{v}=\mathbf{v}(P)$ definită în tot spațiul, a sistemului

$$\begin{cases}\operatorname{div}\mathbf{v}(P)=0\\ \operatorname{rot}\mathbf{v}(P)=\mathbf{w}(P),\end{cases}$$

unde $\mathbf{w}=\mathbf{w}(P)$ este o funcție vectorială dată, continuă împreună cu derivatele sale parțiale de ordinul unu și satisfăcînd condițiile

$$\operatorname{div}\mathbf{w}(P)\equiv0,\quad|\mathbf{w}(P)|\leqslant\frac{A}{r^{2+\alpha}},\ \text{pentru}\ r>R_0,$$

unde $A>0$ și $0<\alpha<1$ sînt constante, iar $\mathbf{r}=\mathbf{OP}$.

Rezolvare. Condiția $\operatorname{div}\mathbf{w}(P)\equiv0$ este necesară dacă vrem ca sistemul dat să admită măcar o soluție, deoarece se știe că divergența unui rotor este nulă. Deoarece $\mathbf{v}=\mathbf{v}(P)$ trebuie să fie solenoidal, putem scrie $\mathbf{v}(P)=\operatorname{rot}\mathbf{V}(P)$ și fără a micșora generalitatea putem presupune că are loc și egalitatea $\operatorname{div}\mathbf{V}(P)\equiv0$. Mai departe, din condițiile $\mathbf{v}=\operatorname{rot}\mathbf{V}$, $\operatorname{div}\mathbf{V}\equiv0$ și

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{V})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{V})-\Delta\mathbf{V}$$

obținem pentru $\mathbf{V}$ egalitatea $\Delta\mathbf{V}=-\mathbf{w}$. Proiectînd această egalitate pe cele trei axe de coordonate, se găsește

$$\Delta V_1=-w_1(P),\quad\Delta V_2=-w_2(P),\quad\Delta V_3=-w_3(P)$$

de unde, dacă ținem seama de problema (16), vom ajunge la concluzia

$$V_i(P)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{R^3}\frac{w_i(Q)}{\rho}\,\mathrm{d}\omega,\quad i=1,\ 2,\ 3$$

sau în formă vectorială

$$\mathbf{V}(P)=\frac{1}{4\pi}\iiint_{R^3}\frac{\mathbf{w}(Q)}{\rho}\,d\omega.$$

Se poate demonstra că vectorul

$$\mathbf{v}(P)=\operatorname{rot}_P\mathbf{V}(P)=\frac{1}{4\pi}\iiint_{R^3}\frac{\rho\times\mathbf{w}}{\rho^3}\,d\omega$$

este în adevăr o soluție a problemei puse.

19) Să se arate că o soluție a sistemului

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\mathbf{v}(P)=\mathbf{w}(P)\\ \operatorname{div}\mathbf{v}(P)=q(P),\end{cases}$$

unde $\mathbf{w}$ și q satisfac condițiile cerute în problemele (18) și (16), este dată de formula

$$\mathbf{v}(P)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{R^3}\frac{q(Q)\rho+\mathbf{w}\times\rho}{\rho^3}\,d\omega.$$

3.5. ECUAȚIA ȘI FUNCȚIILE LUI MATHIEU

Aceste noțiuni au fost considerate prima dată în anul 1868, cu ocazia rezolvării ecuației undelor pentru o membrană elastică de forma eliptică, fixată la margine sau, cum se mai spune, cu condiții nule pe frontieră. Mai tîrziu s-a constatat că există și alte probleme în care apar funcțiile lui Mathieu, ca, de exemplu: oscilațiile suprafeței lichidului într-un bazin de formă eliptică, găsirea soluției ecuației căldurii într-un cilindru eliptic, rezolvarea unor ecuații din teoria undelor electromagnetice, rezolvarea ecuației lui Helmholtz etc.

Pentru a arăta cum se ajunge la ecuația diferențială a lui Mathieu, să considerăm în plan ecuația cu derivate parțiale $\Delta u+k^2u=0$, în care k este o constantă și $u=u(x,y)$ este funcția necunoscută. Să facem schimbarea de variabile

(202) $$x=c\operatorname{ch}\xi\cos\varphi,\quad y=c\operatorname{sh}\xi\sin\varphi,$$

unde $c>0$ este o constantă, iar ξ și φ sînt noile variabile independente. Vom impune condițiile $\xi>0$ și $\varphi\in(0,2\pi)$ și vom spune că ξ și φ sînt coordonatele eliptice ale punctului (x,y) din plan. Curba $\xi=\xi_0=$constant este elipsa de focare $(\pm c,0)$ care trece prin punctul fixat (x_0,y_0), deoarece este evident că punctele acestei curbe satisface ecuația

(203) $$\left(\frac{x}{c\operatorname{ch}\xi_0}\right)^2+\left(\frac{y}{c\operatorname{sh}\xi_0}\right)^2=1.$$

Tot astfel, curba $\varphi=\varphi_0=$constant este o ramură a hiperbolei de focare $(\pm c,\,0)$ care trece prin punctul fixat (x_0,y_0), deoarece punctele acestei curbe satisfac ecuația

(204) $$\left(\frac{x}{c\cos\varphi_0}\right)^2-\left(\frac{y}{c\sin\varphi_0}\right)^2=1.$$

Se mai spune că cele două familii de elipse și hiperbole sînt omofocale. Se poate vedea că ele reprezintă două familii de curbe ortogonale, adică unghiul format de două curbe din familii diferite este drept.

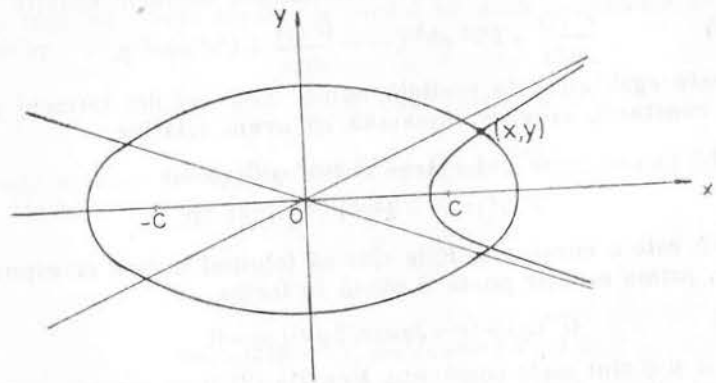

Fig. 3.6

În figura 3.6 sînt desenate liniile $\xi=$constant și $\varphi=$constant care trec prin punctul ales (x,y). Se mai spune că ξ și φ formează un sistem de coordonate curbilinii ortogonale în plan. Dacă acum vom considera funcția u ca depinzînd de variabilele independente

ξ şi φ, adică vom scrie $u=u(\xi,\varphi)$, vom avea pentru laplacian formula

$$\Delta u=\frac{1}{L_1L_2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{L_2}{L_1}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{L_1}{L_2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right], \tag{205}$$

unde L_1 şi L_2 sînt parametrii lui Lamé, adică

$$L_1=(x_\xi^2+y_\xi^2)^{1/2},\quad L_2=(x_\varphi^2+y_\varphi^2)^{1/2}. \tag{206}$$

În cazul de faţă vom avea

$$L_1=c(\mathrm{ch}^2\,\xi-\cos^2\varphi)^{1/2},\quad L_2=c(\mathrm{ch}^2\,\xi-\cos^2\varphi)^{1/2}, \tag{207}$$

astfel că laplacianul are valoarea

$$\Delta u=\frac{1}{c^2(\mathrm{ch}^2\,\xi-\cos^2\varphi)}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right). \tag{208}$$

Prin urmare, vom putea scrie ecuaţia $\Delta u+k^2u=0$ în forma

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2c^2(\mathrm{ch}^2\,\xi-\cos^2\varphi)u=0. \tag{209}$$

Dacă facem separarea variabilelor, adică dacă scriem $u=F(\xi)G(\varphi)$ unde funcţiile F şi G trebuie determinate, obţinem ecuaţia

$$\frac{F''(\xi)}{F(\xi)}+k^2c^2\,\mathrm{ch}^2\,\xi=-\frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)}+k^2c^2\cos^2\varphi. \tag{210}$$

Această egalitate este posibilă numai dacă cei doi termeni ai ei sînt constanţi, ceea ce înseamnă că avem relaţiile

$$G''(\varphi)+(\lambda-k^2c^2\cos^2\varphi)G(\varphi)=0$$
$$F''(\xi)-(\lambda-k^2c^2\,\mathrm{ch}^2\,\xi)F(\xi)=0, \tag{211}$$

unde λ este o constantă. Este clar că folosind notaţii corespunzătoare, prima ecuaţie poate fi scrisă în forma

$$G''(\varphi)+(a-2q\cos 2\varphi)G(\varphi)=0, \tag{212}$$

unde a şi q sînt nişte constante. Ecuaţia (212) se numeşte ecuaţia diferenţială a lui Mathieu. Dacă notăm cu y funcţia necunoscută şi cu x variabila independentă, atunci avem de studiat ecuaţia

$$y''(x)+(a-2q\cos 2x)y(x)=0, \tag{213}$$

cu a şi q constante, care a condus la introducerea funcţiilor lui Mathieu. Ea este un caz particular al ecuaţiei de forma

$y''(x)+a(x)y(x)=0$, cu $a=a(x)$ funcţie continuă şi periodică. Din motive de ordin fizic, ne interesează soluţiile 2π — periodice ale ecuaţiei (213), adică soluţiile pentru care avem

$$y(0)=y(2\pi),\quad y'(0)=y'(2\pi), \tag{214}$$

acestea fiind determinate pînă la un factor constant de proporţionalitate. În cazul $q=0$ şi $a=m^2$, unde $m=$ întreg $\geqslant 0$, ecuaţia (213) are în mod evident soluţiile $\cos mx$ şi $\sin mx$, care satisfac (214). Dacă $q\neq 0$, situaţia se complică foarte mult. Se poate demonstra că pentru fiecare $q\neq 0$, există un şir crescător de valori $a_n=a_n(q)\to+\infty$, numite autovalori ale ecuaţiei, pentru care putem determina soluţii satisfăcînd condiţia de periodicitate (214). Noi am vrea însă, în ipoteza q fixat, să găsim acele valori ale parametrului $a=a(q)$, pentru care soluţia 2π — periodică $y=y(x,q)$ să tindă la $\cos mx$, respectiv $\sin mx$, atunci cînd $q\to 0$. Vom nota aceste funcţii $ce_m(x,q)$ şi $se_m(x,q)$. Vom observa că pentru $m\geqslant 0$ întreg şi $q\neq 0$ daţi aprioric, parametrul a se va determina în mod unic, astfel încît să obţinem fie funcţia $ce_m(x,q)$, fie funcţia $se_m(x,q)$, dar niciodată pe amîndouă pentru aceeaşi valoare a lui a. Pentru a putea justifica această afirmaţie (teorema lui Ince), trebuie mai întîi să ţinem seama de faptul că dacă dezvoltăm în serie Fourier

$$y(x)=A_0+\sum_{r=1}^{\infty}(A_r\cos rx+B_r\sin rx), \tag{215}$$

soluţia ecuaţiei lui Mathieu (213), ajungem la concluzia că funcţiile lui Mathieu sînt de forma următoare

$$ce_{2n}(x,q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{2n}\cos 2rx$$
$$ce_{2n+1}(x,q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}^{2n+1}\cos(2r+1)x$$
$$se_{2n}(x,q)=\sum_{r=1}^{\infty}B_{2r}^{2n}\sin 2rx, \tag{216}$$
$$se_{2n+1}(x,q)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{2n+1}\sin(2r+1)x,$$

unde indicele de sus al coeficienților A și B nu trebuie interpretat ca un exponent, el corespunzîndu-se cu indicele respectivei funcții Mathieu. Se observă că în seria lui $ce_{2n}(x,q)$ apare termenul $\cos 2x$ cu coeficientul A_{2n}^{2n}, în seria lui $ce_{2n+1}(x,q)$ apare termenul $\cos(2n+1)x$ cu coeficientul A_{2n+1}^{2n+1} etc. Acestor funcții care, așa cum s-a mai spus, sînt determinate pînă la un factor de proporționalitate, li se impune uneori condiția $A_{2n}^{2n}=1$, $A_{2n+1}^{2n+1}=1$, $B_{2n}^{2n}=1$ $B_{2n+1}^{2n+1}=1$, ceea ce face ca ele să fie unic determinate. Dar mai convenabil este ca ele să fie precizate prin condiția

$$\int_0^{2\pi}[ce_m(x,q)]^2\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}[se_m(x,q)]^2\mathrm{d}x=\pi, \tag{217}$$

care amintește de egalitățile

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 mx\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin^2 mx\mathrm{d}x=\pi,\quad m=\text{natural}. \tag{218}$$

Cu această ocazie facem observația că funcția $se_{2n}(x,q)$ nu este definită pentru valoarea indicelui $n=0$, ceea ce nu este cazul cu funcția $ce_{2n}(x,q)$.

Din condiția de normare (217), rezultă pentru coeficienții funcțiilor Mathieu următoarele egalități

$$2(A_0^{2n})^2+\sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r}^{2n})^2=1,\qquad \sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{2n+1})^2=1,\quad n\geqslant 0 \tag{219}$$

și respectiv

$$\sum_{r=1}^{\infty}(B_{2r}^{2n})^2=1,\qquad \sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{2n+1})^2=1. \tag{220}$$

În prima relație (220), n este un număr natural oarecare, iar în a doua, n este întreg $\geqslant 0$.

Teorema 3.7 (*Ince*). *Fie $q\neq 0$ dat și fie a o autovaloare a ecuației lui Mathieu, adică o valoare pentru care problema* (213)+(214) *are soluție $y=y(x)$ neidentic nulă. Atunci, făcînd abstracție de un factor constant de proporționalitate, această soluție este unică.*

Demonstrație. Presupunem că pentru un $q\neq 0$ și un a convenabil ales, problema (213)+(214) are două soluții $y=y_1(x)$ și $y=y_2(x)$ liniar independente. Scriind

$$y_1''(x)+(a-2q\cos 2x)y_1(x)=0, y_2''(x)+(a-2q\cos 2x)y_2(x)=0 \tag{221}$$

și înmulțind prima relație cu $y_2(x)$, iar a doua cu $y_1(x)$, obținem prin scădere

$$y_1''(x)y_2(x)-y_1(x)y_2''(x)=[y_1'(x)y_2(x)-y_1(x)y_2'(x)]'=0, \tag{222}$$

ceea ce ne spune că funcția $y_1'(x)y_2(x)-y_1(x)y_2'(x)$ este identică cu o constantă. Însă funcțiile proprii $y_1(x)$ și $y_2(x)$ au serii Fourier de forma (216). Dacă presupunem că amîndouă se dezvoltă în serie de cosinusuri, ar rezulta că soluția generală $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ a ecuației lui Mathieu (213) constă numai din funcții pare, afirmație care poate fi ușor contrazisă. Dacă presupunem că amîndouă funcțiile $y_1(x)$ și $y_2(x)$ se dezvoltă în serie de sinusuri, ar rezulta că soluția generală a ecuației (213) constă numai din funcții impare, ceea ce iarăși nu este adevărat. Să presupunem acum că $y_1(x)$ și $y_2(x)$ are dezvoltările

$$y_1(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{2r}\cos 2rx,\qquad y_2(x)=\sum_{r=0}^{\infty}b_{2r+1}\sin(2r+1)x. \tag{223}$$

În acest caz, se constată că wronskianul celor două soluții particulare, adică expresia $y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)$, își schimbă semnul dacă se înlocuiește x cu $x+\pi$. Avînd în vedere că această expresie este constantă, rezultă că wronskianul este identic nul, ceea ce contrazice faptul că cele două soluții sînt liniar independente. La fel se judecă dacă se presupune că au loc dezvoltările

$$y_1(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{2r+1}\cos(2r+1)x,\qquad y_2(x)=\sum_{r=1}^{\infty}b_{2r}\sin 2rx. \tag{224}$$

Prin urmare, singurele dezvoltări care mai pot fi admise sînt

$$y_1(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{2r}\cos 2rx,\quad y_2(x)=\sum_{r=1}^{\infty}b_{2r}\sin 2rx \tag{225}$$

și respectiv

$$y_1(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{2r+1}\cos(2r+1)x,\quad y_2(x)=\sum_{r=0}^{\infty}b_{2r+1}\sin(2r+1)x. \tag{226}$$

Să arătăm că și aceste ipoteze duc la contradicție, de unde va rezulta unicitatea funcției proprii, adică tocmai concluzia teoremei de care ne ocupăm. Să presupunem, de exemplu, că au loc dezvoltă-

rile (226). Derivînd și înlocuind în ecuația (213), vom obține următoarele formule de recurență

$$(a-1-q)a_1-qa_3=0$$

(227)

$$[(2r+1)^2-a]a_{2r+1}+q(a_{2r-1}+a_{2r+3})=0, \quad r=1, 2, 3, \ldots$$

și respectiv

$$(a-1+q)b_1-qb_3=0$$

(228)

$$[(2r+1)^2-a]b_{2r+1}+q(b_{2r-1}+b_{2r+3})=0, \quad r=1, 2, 3, \ldots$$

Eliminînd pe a din sistemul

(229) $$(a-1-q)a_1-qa_3=0, \quad (a-1+q)b_1-qb_3=0,$$

obținem în baza faptului că $q\neq 0$, relația

(230) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} 2a_1b_1.$$

În mod asemănător, eliminînd pe a din sistemul

$$[(2r+1)^2-a]a_{2r+1}+q(a_{2r-1}+a_{2r+3})=0$$

(231)

$$[(2r+1)^2-a]b_{2r+1}+q(b_{2r-1}+b_{2r+3})=0,$$

se obține relația

(232) $$\begin{vmatrix} a_{2r-1} & a_{2r+1} \\ b_{2r-1} & b_{2r+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2r+1} & a_{2r+3} \\ b_{2r+1} & b_{2r+3} \end{vmatrix}, \quad r=1, 2, 3, \ldots$$

care aplicată în mod repetat, ne duce la concluzia că

(233) $$\begin{vmatrix} a_{2r+1} & a_{2r+3} \\ b_{2r+1} & b_{2r+3} \end{vmatrix} = 2a_1b_1, \quad r=0, 1, 2, \ldots$$

dacă ținem seama și de (230). Deoarece coeficienții Fourier a_{2r+1} și b_{2r+1} tind la zero pentru $r\to\infty$, obținem de mai sus că $a_1b_1=0$. Aceasta înseamnă că cel puțin unul din numerele a_1 și b_1 este zero. Dacă presupunem $a_1=0$, ținînd seama de formulele (227), obținem imediat că toți coeficienții a_{2r+1} sînt egali cu zero, adică $y_1(x)\equiv 0$, ceea ce este absurd. Dacă presupunem $b_1=0$, rezultă $y_2(x)\equiv 0$ ceea ce iarăși este imposibil. În concluzie, dezvoltarea (226) nu poate avea loc. La fel se judecă dacă presupunem că are loc dezvoltarea (225). Demonstrația este terminată.

Observație. Dacă pentru un $q\neq 0$ se cunoaște valoarea parametrului a (autovaloarea) pentru care ecuația (213) admite soluția $ce_{2n+1}(x, q)$ atunci, pentru determinarea efectivă a coeficienților acestei funcții avem relațiile (227) în care se înlocuiește c_{2r+1} cu A_{2r+1}^{2n+1} precum și a doua condiție din relațiile (219). În mod cu totul similar, dacă pentru un $q\neq 0$ se cunoaște autovaloarea a astfel ca ecuația Mathieu (213) să admită soluția $se_{2n+1}(x, q)$ atunci, pentru aflarea coeficienților acestei funcții avem relațiile (228) în care se înlocuiește b_{2r+1} cu B_{2r+1}^{2n+1}, precum și a doua condiție din relațiile de normare (220). Formule asemănătoare de recurență pot fi stabilite și pentru coeficienții funcțiilor $ce_{2n}(x, q)$ și $se_{2n}(x, q)$ în cazurile $n=$ întreg $\geqslant 0$ și respectiv $n=$ număr natural. Toată dificultatea problemei nu ar consta în aflarea coeficienților folosind formulele de recurență (aceste funcții au fost dealtfel tabelate, cu 5 zecimale exacte), ci în aflarea autovalorilor a pentru care ecuația admite ca soluție particulară una sau alta dintre funcțiile Mathieu. Funcțiile de forma (216) se mai numesc și funcții Mathieu de prima speță.

Teorema 3.8 (*Ortogonalitatea funcțiilor Mathieu de prima speță*). *Sînt adevărate următoarele relații*

(234) $$\int_0^{2\pi} ce_m(x, q)ce_n(x, q)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} se_m(x, q)se_n(x, q)\mathrm{d}x=0, \ m\neq n$$

$$\int_0^{2\pi} ce_m(x, q)se_n(x, q)\mathrm{d}x=0.$$

Demonstrație. Se poate folosi și dezvoltarea în serie Fourier, dar mai simplu este să procedăm altfel. Să presupunem că $y_1(x)$ și $y_2(x)$ sînt două soluții 2π — periodice ale ecuației (231) corespunzătoare valorilor q, a_1 și q, a_2 ale constantelor ce apar în această ecuație. Din

(235) $$\begin{aligned} y_1''(x)+(a_1-2q\cos 2x)y_1(x)&=0, \\ y_2''(x)+(a_2-2q\cos 2x)y_2(x)&=0 \end{aligned}$$

se obține relația

(236) $$y_1''(x)y_2(x)-y_1(x)y_2''(x)=(a_2-a_1)y_1(x)y_2(x).$$

De aici, prin integrare, vom găsi

$$(237)\qquad \left[y_1'(x)y_2(x)-y_1(x)y_2'(x)]^2\right]_0^{2\pi}=(a_2-a_1)\int_0^{2\pi}y_1(x)y_2(x)dx$$

şi deoarece primul termen al acestei egalităţi este nul, iar $a_1\neq a_2$ rezultă că $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ sînt ortogonale pe $[0, 2\pi]$. Cu aceasta, demonstraţia este terminată.

Să revenim acum la a doua ecuaţie din relaţia (211) şi anume

$$(238)\qquad F''(\xi)-(\lambda-k^2c^2\operatorname{ch}^2\xi)F(\xi)=0,$$

care se numeşte ecuaţia modificată a lui Mathieu. Folosind notaţii corespunzătoare şi relaţia $2\operatorname{ch}^2\xi=1+\operatorname{ch}2\xi$, ea se poate scrie sub forma

$$(239)\qquad F''(\xi)-(a-2q\operatorname{ch}2\xi)F(\xi)=0$$

întru totul asemănătoare ecuaţiei (212). Dacă notăm variabila independentă cu x şi funcţia necunoscută cu $y=y(x)$, putem spune că ecuaţia modificată a lui Mathieu este

$$(240)\qquad y''(x)-(a-2q\operatorname{ch}2x)y(x)=0$$

întru totul asemănătoare cu (213). Constantele a şi q au aceeaşi semnificaţie ca în (213), dacă ne referim la expresia lor în funcţie de λ, k şi c, adică

$$(241)\qquad a=\lambda-\frac{k^2c^2}{2},\quad 2q=\frac{k^2c^2}{2}.$$

Dacă în ecuaţia modificată (240) punem $y(x)=u(jx)$, unde u este funcţia necunoscută, iar j este unitatea imaginară, vom găsi că $u=u(t)$ satisface ecuaţia

$$(242)\qquad u''(t)+(a-2q\cos 2t)u(t)=0,$$

care nu este alta decît ecuaţia Mathieu. Posibilitatea trecerii la soluţii de argument imaginar se bazează pe faptul că soluţiile ecuaţiilor (213) şi (240) sînt în realitate funcţii întregi (olomorfe în tot planul complex) în raport cu fiecare din variabilele x şi q.

Rezultă că pentru $q\neq 0$ şi $n=$ întreg $\geqslant 0$ daţi, există o singură valoare a parametrului a, care coincide cu una din autovalorile ecuaţiei lui Mathieu, astfel, că ecuaţia modificată (240) admite soluţia particulară

$$(243)\qquad Ce_{2n}(x, q)=ce_{2n}(jx, q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{2n}\cos 2rjx=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{2n}\operatorname{ch}2rx.$$

De asemenea, pentru $q\neq 0$ şi $n=$ întreg $\geqslant 0$ daţi, există o singură valoare a parametrului a, astfel că ecuaţia modificată (240) admite soluţia particulară

$$(244)\qquad Ce_{2n+1}(x, q)=ce_{2n+1}(jx, q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}^{2n+1}\cos(2r+1)jx=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}^{2n+1}\operatorname{ch}(2r+1)x.$$

Alte cazuri în care putem indica soluţii particulare ale ecuaţiei (240) corespund acelor valori ale parametrului $a=a(q)$, pentru care ecuaţia (213) admite soluţia $se_{2n}(x, q)$ sau $se_{2n+1}(x, q)$ cu $n=$ $=$ întreg >0 şi respectiv $\geqslant 0$. Soluţiile ecuaţiei modificate (240) la care ne referim, sînt

$$(245)\qquad Se_{2n}(x, q)=-j\,se_{2n}(jx, q)=\sum_{r=1}^{\infty}B_{2r}^{2n}\operatorname{sh}2rx$$

şi respectiv

$$(246)\qquad Se_{2n+1}(x, q)=-j\,se_{2n+1}(jx, q)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{2n+1}\operatorname{sh}(2r+1)x,$$

dar bineînţeles, ele corespund la valori diferite ale parametrului a pentru acelaşi $q\neq 0$ dat.

Definiţia 3.4. Funcţiile

$$(247)\qquad Ce_m(x, q)=ce_m(jx, q)\ \text{şi}\ Se_m(x, q)=-j\,se_m(jx, q)$$

se numesc funcţii asociate Mathieu de prima speţă.

Revenind la ecuaţia lui Helmholtz

$$(248)\qquad \Delta u+k^2u=0,$$

pe care o scriem în coordonatele eliptice ξ şi φ, rezultă că pentru fiecare $n=$ întreg $\geqslant 0$ ea admite o soluţie particulară de forma:

$$(249)\qquad u_n(\xi, \varphi)=Ce_n(\xi, q)ce_n(\varphi, q),$$

în care $q=k^2c^2/4$, constanta $c>0$ fiind cea care apare în schimbarea de coordonate (202).

Tot astfel, pentru fiecare $n=$ natural, ecuaţia (248) admite o soluţie particulară de forma

$$(250)\qquad u_n(\xi, \varphi)=Se_n(\xi, q)se_n(\varphi, q)$$

și deci în anumite situații, cînd avem de rezolvat o problemă cu condiții la limită, vom căuta soluția ecuației (248) în forma unei serii și anume:

$$u(\xi, \varphi)=a_0Ce_0(\xi, q)ce_0(\varphi, q)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_nCe_n(\xi, q)ce_n(\varphi, q)+ \tag{251}$$

$$+b_nSe_n(\xi, q)se_n(\varphi, q)],$$

în care coeficienții a_n și b_n trebuie determinați în mod corespunzător.

Aplicație. Să se găsească soluția problemei

$$\begin{aligned} &\Delta u+k^2u=0, && \text{dacă } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)<1 \\ &u(x, y)=f(x, y), && \text{dacă } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1, \end{aligned} \tag{252}$$

în care f este o funcție continuă dată.

Rezolvare. Funcția necunoscută u satisface ecuația lui Helmholtz în interiorul unei elipse și ia valori prescrise pe elipsa respectivă. Vom scrie această ecuație în coordonate eliptice, după ce vom determina constantele pozitive c și ξ_0 din condițiile

$$c \operatorname{ch} \xi_0=a, \quad c \operatorname{sh} \xi_0=b. \tag{253}$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$x=c \operatorname{ch} \xi \cos \varphi, \quad y=c \operatorname{sh} \xi \sin \varphi, \tag{254}$$

problema de care ne ocupăm se poate reformula astfel: să se afle funcția u care satisface condițiile:

$$\begin{aligned} &\Delta u+k^2u=0 && \text{dacă } 0<\xi<\xi_0 \\ &u(\xi_0, \varphi)=g(\varphi), \end{aligned} \tag{255}$$

în care g este o funcție continuă și 2π — periodică, dată prin relația

$$g(\varphi)=f(a \cos \varphi, b \sin \varphi). \tag{256}$$

Căutînd funcția $u=u(\xi, \varphi)$ în forma seriei (251), va trebui să aflăm coeficienții a_n și b_n folosind dezvoltarea

$$g(\varphi)=a_0Ce_0(\xi_0, q)ce_0(\varphi, q)+ \tag{257}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[a_nCe_n(\xi_0, q)ce_n(\varphi, q)+b_nSe_n(\xi_0, q)se_n(\varphi, q)]$$

și relațiile de ortogonalitate (234). Înmulțind egalitatea precedentă cu $ce_m(\varphi, q)$ și integrînd termen cu termen pe $[0, 2\pi]$, vom găsi

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi)ce_m(\varphi, q)\mathrm{d}\varphi=a_mCe_m(\xi_0, q)\int_0^{2\pi}[ce_m(\varphi, q)]^2\,\mathrm{d}\varphi= \tag{258}$$

$$=a_mCe_m(\xi_0, q)\pi,$$

ceea ce înseamnă că coeficienții a_n sînt unic determinați și se calculează cu formula

$$a_n=\frac{1}{\pi Ce_n(\xi_0, q)}\int_0^{2\pi} g(\varphi)ce_n(\varphi, q)\mathrm{d}\varphi, \quad n\geqslant 0. \tag{259}$$

În mod asemănător se obține că și coeficienții b_n se determină unic, ei fiind dați de formula

$$b_n=\frac{1}{\pi Se_n(\xi_0, q)}\int_0^{2\pi} g(\varphi)se_n(\varphi, q)\mathrm{d}\varphi, \quad n\geqslant 1. \tag{260}$$

Înlocuind valorile acestor coeficienți în seria (251), obținem soluția problemei (255).

Caz particular (a). Să presupunem că funcția $g=g(\varphi)$ este pară în raport cu punctul π. Avînd în vedere că funcțiile se_n se exprimă ca serie de sinusuri de forma (216), nu este greu să se tragă concluzia că toți coeficienții $b_n=0$, iar

$$a_n=\frac{2}{\pi Ce_n(\xi_0, q)}\int_0^{\pi} g(\varphi)ce_n(\varphi, q)\mathrm{d}\varphi, \quad n\geqslant 0. \tag{261}$$

În acest caz, soluția problemei (255) se reprezintă prin seria

$$u(\xi, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nCe_n(\xi, q)ce_n(\varphi, q), \tag{262}$$

în care a_n sînt dați de (261). În legătură cu acest aspect, să rezolvăm următorul

Exercițiu. Să se afle funcția u știind că

$$\begin{aligned} &\Delta u+k^2u=0, && \text{dacă } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)<1 \\ &u(x, y)=u_0, && \text{dacă } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1, \end{aligned} \tag{263}$$

în care u_0 este o constantă.

Rezolvare. Conform celor spuse, soluția exprimată în coordonate eliptice va fi de forma (262). Deoarece

$$(264)\qquad \int_0^{\pi} u_0 ce_{2n+1}(\varphi, q)\mathrm{d}\varphi = u_0 \int_0^{\pi} \left[\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2n+1} \cos\,(2r+1)\varphi\right]\mathrm{d}\varphi = 0,$$

rezultă că toți coeficienții $a_{2n+1}=0$. Apoi, deoarece

$$(265)\qquad \int_0^{\pi} u_0 ce_{2n}(\varphi, q)\mathrm{d}\varphi = u_0 \int_0^{\pi} \left[\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n} \cos 2r\varphi\right]\mathrm{d}\varphi = \pi u_0 A_0^{2n},$$

putem spune că soluția problemei (263) este dată de

$$(266)\qquad u(\xi, \varphi) = 2u_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_0^{2n} \frac{Ce_{2n}(\xi, q)}{Ce_{2n}(\xi_0, q)} ce_{2n}(\varphi, q).$$

Caz particular (b). Să presupunem că funcția $g=g(\varphi)$ este impară în raport cu punctul π, adică $g(\pi+\varphi)=-g(\pi-\varphi)$ oricare ar fi valoarea variabilei φ. În acest caz, produsul $g(\varphi)ce_n(\varphi, q)$ este o funcție impară în raport cu punctul π, oricare ar fi $n=$ întreg $\geqslant 0$, astfel că toți coeficienții $a_n=0$, iar

$$(267)\qquad b_n = \frac{2}{\pi Se_n(\xi_0, q)} \int_0^{\pi} g(\varphi) se_n(\varphi, q)\mathrm{d}\varphi, \quad n \geqslant 1,$$

soluția problemei (255) reprezentîndu-se de data aceasta prin seria

$$(268)\qquad u(\xi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Se_n(\xi, q) se_n(\varphi, q).$$

Geometric, paritatea sau imparitatea funcției $g=g(\varphi)$ se traduce prin faptul că în punctele de pe elipsă simetrice în raport cu axa absciselor, funcția $f=f(x, y)$ ia valori egale sau valori opuse.

Exercițiu. Să se afle u știind că

$$(269)\qquad \begin{aligned} &\Delta u + k^2 u = 0, && \text{dacă } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)<1\\ &u(x, y) = y/b, && \text{dacă } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1. \end{aligned}$$

Rezolvare. Urmînd schema descrisă, adică trecînd la coordonate eliptice ξ și φ, condiția la limită se va scrie în forma

$u(\xi_0, \varphi)=c \operatorname{sh} \xi_0 \sin\varphi/b=\sin\varphi$, adică avem $g(\varphi)=\sin\varphi$. Soluția va fi deci dată de (268), în care b_n se calculează cu formula (267), adică

$$(270)\qquad b_n = \frac{2}{\pi Se_m(\xi_0, q)} \int_0^{\pi} \sin\varphi\, se_n(\varphi, q)\mathrm{d}\varphi, \quad n \geqslant 1.$$

După un calcul elementar, se obține că

$$(271)\qquad b_{2n+1} = \frac{B_0^{2n+1}}{Se_{2n+1}(\xi_0, q)}, \quad b_{2n}=0,$$

astfel că soluția căutată este

$$(272)\qquad u(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_0^{2n+1} \frac{Se_{2n+1}(\xi, q)}{Se_{2n+1}(\xi_0, q)} se_{2n+1}(\varphi, q).$$

Reamintim semnificația unor constante care apar în aceste probleme: c și ξ_0 se determină în mod univoc din relația (253), iar $q=k^2c^2/4$. B_0^{2n+1} este primul coeficient din dezvoltarea în serie (216) a funcțiilor lui Mathieu $se_{2n+1}(x, q)$.

Observație. În legătură cu exercițiile precedente se poate pune întrebarea ce se întîmplă dacă ξ_0 coincide cu vreuna din rădăcinile funcțiilor $Ce_n(\xi, q)$ sau $Se_n(\xi, q)$. Să ne referim la dezvoltarea (257) și să presupunem că pentru un anume $m=$ întreg $\geqslant 0$ avem $Ce_m(\xi_0, q)=0$. Atunci, este evident că se impune condiția de compatibilitate

$$(273)\qquad \int_0^{2\pi} g(\varphi) ce_m(\varphi, q)\mathrm{d}\varphi = 0$$

și că în (257) coeficientul a_m poate fi luat arbitrar, deci nu vom mai avea unicitate pentru soluția problemei (255). Dacă pentru un anumit $m=$ natural avem $Se_m(\xi_0, q)=0$, condiția de compatibilitate se reduce la

$$(274)\qquad \int_0^{2\pi} g(\varphi) se_m(\varphi, q)\mathrm{d}\varphi = 0$$

și în dezvoltarea (257) poate fi luat arbitrar coeficientul b_m.

Propagarea căldurii într-un cilindru eliptic. Presupunem că lungimea cilindrului este infinită sau mai exact, că lungimea sa este atît de mare încît efectul produs de extremităţile sale poate fi neglijat. Vom integra ecuaţia căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{275}$$

în care funcţia necunoscută (temperatura) $u=u(x, y, t)$ nu depinde de variabila z, admiţînd următoarele condiţii la limită

$$\begin{array}{ll} u(x, y, t)=0, & t<0 \text{ şi } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)<1 \\ u(x, y, t)=u_0, & \text{dacă } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1 \\ u(x, y, t)\to u_0, & \text{dacă } t\to+\infty, \end{array} \tag{276}$$

unde u_0=constant. Făcînd substituţia $u-u_0=v$, în care v este funcţia necunoscută, obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial v}{\partial t}=k^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{277}$$

cu condiţiile iniţiale şi la limită

$$\begin{array}{ll} v(x, y, t)=-u_0, & t<0 \text{ şi } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)<1 \\ v(x, y, t)=0, & \text{dacă } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1 \\ v(x, y, t)\to 0, & \text{dacă } t\to+\infty. \end{array} \tag{278}$$

Dacă punem

$$v(x, y, t)=w(x, y)e^{-\lambda^2 k^2 t} \tag{279}$$

şi înlocuim în (277), găsim ecuaţia

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\lambda^2 w=0, \tag{280}$$

la care, în mod obligatoriu, trebuie să adăugăm condiţia

$$w(x, y)=0, \qquad \text{dacă } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1. \tag{281}$$

Trecînd la coordonate eliptice în plan

$$x=c \operatorname{ch}\xi\cos\varphi, \qquad y=c \operatorname{sh}\xi\sin\varphi \tag{282}$$

şi alegînd corespunzător c şi ξ_0, condiţia (281) se scrie în forma

$$w(\xi_0, \varphi)=0, \qquad \varphi\in(0, 2\pi). \tag{283}$$

Ţinînd seama de condiţiile de simetrie care trebuie îndeplinite în cazul de faţă, va trebui să căutăm pentru w o dezvoltare care să conţină numai funcţiile Ce_{2n} şi ce_{2n}. Mai precis, vom observa că pentru fiecare întreg $n\geqslant 0$ fixat, ecuaţia (280) admite soluţia particulară

$$Ce_{2n}(\xi, q)ce_{2n}(\varphi, q), \quad 2q=\lambda^2 c^2/2, \tag{284}$$

dar deoarece vrem să aibă loc (283), vom impune condiţia $Ce_{2n}(\xi_0, q)=0$, ceea ce presupune să luăm valoarea lui q egală cu una din rădăcinile funcţiei analitice $Ce_{2n}(\xi_0, q)$, considerată ca depinzînd de variabila q. Dacă notăm aceste rădăcini $q_{2n,m}$, unde m ia pe rînd valorile 1, 2, 3, ... şi punem $2q_{2n,m}=\lambda^2_{2n,m}c^2/2$, ajungem la concluzia că ecuaţia (277) admite soluţia particulară

$$Ce_{2n}(\xi, q_{2n,m})ce_{2n}(\varphi, q^2_{2n,m})e^{-k^2 t}, \quad m=1, 2, \ldots, \tag{285}$$

unde $n\geqslant 0$ este fixat. Înmulţind această funcţie cu o constantă $a_{2n,m}$ şi sumînd după toate valorile posibile ale lui n şi m, se vede că funcţia

$$v(\xi, \varphi, t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{2n,m}Ce_{2n}(\xi, q_{2n,m})ce_{2n}(\varphi, q_{2n,m})e^{-\lambda^2_{2n,m}k^2 t} \tag{286}$$

va satisface ecuaţia $v_t=k^2\Delta v$ şi condiţia că se anulează pe elipsa dată ($\xi=\xi_0$), precum şi condiţia că pentru ξ şi φ fixaţi, ea tinde la zero dacă $t\to+\infty$. Făcînd în relaţia precedentă pe t să tindă la zero prin valori negative şi ţinînd seama de prima condiţie (278), obţinem

$$-u_0=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{2n,m}Ce_{2n}(\xi, q_{2n,m})ce_{2n}(\varphi, q_{2n,m}), \tag{287}$$

din care trebuie să găsim coeficienţii $a_{2n,m}$. Fixînd o pereche de indici $p\geqslant 0$ şi $r\geqslant 1$, vom înmulţi relaţia (287) cu factorul

$$Ce_{2p}(\xi, q_{2p,r})ce_{2p}(\varphi, q_{2p,r})(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\varphi) \tag{288}$$

şi vom integra în raport cu ξ de la 0 la ξ_0, iar în raport cu φ de la 0 la 2π. Dacă facem notaţia

$$f_{n,m}(\xi, \varphi)=Ce_n(\xi, q_{n,m})ce_n(\varphi, q_{n,m}), \quad n\geqslant 0 \text{ şi } m\geqslant 1 \tag{289}$$

este clar că în partea dreaptă a egalității obținute prin integrare vor apare termeni de forma

$$(290)\qquad \int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi} f_{2n,m}(\xi,\varphi)f_{2p,r}(\xi,\varphi)(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Vom demonstra ulterior că toate aceste integrale sînt nule, cu excepția cazului $n=p$, $m=r$. În baza acestui rezultat și folosind notația introdusă, egalitatea despre care vorbim se reduce la

$$(291)\qquad -u_0\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi} f_{2p,r}(\xi,\varphi)(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=a_{2p,r}\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi} f^2_{2p,r}(\xi,\varphi)(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Ținînd seama de egalitățile evidente

$$\int_0^{2\pi} ce_{2p}(\varphi,q)\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\pi A_2^{2p},\qquad \int_0^{2\pi} ce^2_{2p}(\varphi,q)\,\mathrm{d}\varphi=\pi$$

$$(292)\qquad \int_0^{2p} ce_{2p}(\varphi,q)\,\mathrm{d}\varphi=2\pi A_0^{2p}$$

și făcînd notația

$$(293)\qquad \int_0^{2\pi} ce^2_{2p}(\varphi,q_{2p,r})\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\pi\alpha_{2p,r},$$

deducem din (291) expresia lui $a_{2p,r}$ și anume

$$(294)\qquad a_{2p,r}=\frac{-u_0\int_0^{\xi_0} Ce_{2p}(\xi,q_{2p,r})(2A_0^{2p}\operatorname{ch} 2\xi-A_2^{2p})\,\mathrm{d}\xi}{\int_0^{\xi_0} Ce^2_{2p}(\xi,q_{2p,r})(\operatorname{ch} 2\xi-\alpha_{2p,r})\,\mathrm{d}\xi}.$$

Facem observația că A_0^{2p} și A_2^{2p} nu sînt constante veritabile, ci depind de parametrul $q=q_{2p,r}$, așa cum s-a văzut din relația de recurență a coeficienților funcției proprii, folosită în demonstrația teoremei lui Ince. Pe de altă parte, deoarece $|\alpha_{2p,r}|<1$

rezultă că integrala de la numitorul expresiei (294) este pozitivă și deci în mod automat nenulă. Concluziile la care am ajuns pot fi rezumate în forma următoare:

Propoziția 3.9. *Soluția problemei* (275)+(276) *se exprimă în coordonate eliptice prin formula*

$$(295)\qquad u=u_0+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{2n,m}Ce_{2n}(\xi,q_{2n,m})ce_{2n}(\varphi,q_{2n,m})e^{-\lambda^2_{2n,m}k^2t}$$

în care coeficienții $a_{2n,m}$ *se obțin din* (294), $q_{2n,m}$ *sînt rădăcinile funcției* $Ce_{2n}(\xi_0,q)$, *iar* $\lambda^2_{2n,m}$ *este dat de*

$$(296)\qquad \lambda^2_{2n,m}=\frac{4q_{2n,m}}{c^2}.$$

Problema electromagnetică, analoagă problemei propagării căldurii într-un cilindru eliptic. Presupunem că cilindrul eliptic metalic este de lungime infinită. Intensitatea cîmpului magnetic **H** este o forță, a cărei mărime satisface ecuația cu derivate parțiale

$$(297)\qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}-\frac{4\pi\mu}{\rho}\frac{\partial H}{\partial t}=0,$$

unde μ și ρ sînt niște constante, numite permeabilitate magnetică și respectiv rezistență specifică. Este cu totul evident că dacă se face notația $k^2=\rho/4\pi\mu$, funcția $H=H(x,y,t)$ satisface ecuația (275). Prin urmare, soluția ecuației (297) care satisface condițiile la limită

$$(298)\qquad \begin{array}{ll} H=0 & \text{pentru } t<0 \text{ și } (x^2/a^2)+(y^2/b^2)<1\\ H=H_0 & \text{pentru } t\geqslant 0 \text{ pe suprafața cilindrului}\\ H\to H_0 & \text{pentru } t\to\infty \text{ și } x,\ y=\text{fixați,}\end{array}$$

se exprimă în coordonate eliptice ξ și φ prin seria

$$(299)\qquad H=H_0\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{2n,m}Ce_{2n}(\xi,q_{2n,m})ce_{2n}(\varphi,q_{2n,m})e^{-\lambda^2_{2n,m}k^2t}\right],$$

în care coeficienții $b_{2n,m}$ se calculează cu formula

$$(300)\qquad b_{2n,m}=\frac{\int_0^{\xi_0} Ce_{2n}(\xi,q_{2n,m})(2A_0^{2n}\operatorname{ch} 2\xi-A_2^{2n})\,\mathrm{d}\xi}{\int_0^{\xi_0} Ce^2_{2n}(\xi,q_{2n,m})(\operatorname{ch} 2\xi-\alpha_{2n,m})\,\mathrm{d}\xi},\quad n\geqslant 0,\ m\geqslant 1,$$

iar $\lambda^2_{2n,m}$ are aceeași semnificație ca în Propoziția 3.9. Desigur constantele c, ξ_0, $q_{2n,m}$ și $\alpha_{2n,m}$ își păstrează și ele semnificația.

Rămîne să demonstrăm relația de ortogonalitate pe care am folosit-o la calcularea coeficienților în dezvoltarea (287).

Propoziția 3.10. *Dacă $q_{n,m}$ cu $n\geqslant 0$ și $m\geqslant 1$ sînt rădăcinile ecuației $Ce_n(\xi_0, q)=0$, iar $f_{n,m}$ este funcția definită de* (289), *atunci*

$$\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi} f_{n,m}(\xi,\varphi)\, pf_{p,r}(\xi,\varphi)(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varphi=0, \tag{301}$$

dacă $(n, m)\neq(p, r)$.

Demonstrație. Din modul cum a fost construită, rezultă că funcția

$$Ce_n(\xi, q)ce_n(\varphi, q), \qquad n=0, 1, 2, \ldots \tag{302}$$

satisface ecuația cu derivate parțiale (209), în care $k^2c^2=4q$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+4q(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\varphi)u=0. \tag{303}$$

Această ecuație poate fi scrisă în forma echivalentă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+2q(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\varphi)u=0. \tag{304}$$

Scriind că funcțiile $f_{n,m}$ și $f_{p,r}$ verifică această ecuație cu $q=q_{n,m}$ și respectiv $q=q_{p,r}$, găsim

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f_{n,m}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f_{n,m}}{\partial\varphi^2}+2q_{n,m}(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\varphi)f_{n,m}=0\\ &\frac{\partial^2 f_{p,r}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f_{p,r}}{\partial\varphi^2}+2q_{p,r}(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\varphi)f_{p,r}=0.\end{aligned} \tag{305}$$

Înmulțind aici prima relație cu $f_{p,r}$ și pe cea de a doua cu $f_{n,m}$ obținem prin scădere

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi}\left[f_{p,r}\frac{\partial f_{n,m}}{\partial\xi}-f_{n,m}\frac{\partial f_{p,r}}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_{p,r}\frac{\partial f_{n,m}}{\partial\varphi}-f_{n,m}\frac{\partial f_{p,r}}{\partial\varphi}\right]+\\ &+2(q_{n,m}-q_{p,r})(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\varphi)f_{n,m}f_{p,r}=0.\end{aligned} \tag{306}$$

Integrînd această egalitate în raport cu ξ de la 0 la ξ_0 și în raport cu φ de la 0 la 2π, găsim

$$\begin{aligned}&\int_0^{\xi_0}\left[f_{p,r}\frac{\partial f_{n,m}}{\partial\xi}-f_{n,m}\frac{\partial f_{p,r}}{\partial\xi}\right]_0^{\xi_0}\mathrm{d}\varphi+\\ &+\int_0^{\xi_0}\left[f_{p,r}\frac{\partial f_{n,m}}{\partial\varphi}-f_{n,m}\frac{\partial f_{p,r}}{\partial\varphi}\right]_0^{2\pi}\mathrm{d}\xi+\\ &+2(q_{n,m}-q_{p,r})\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi}(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\varphi)f_{n,m}f_{p,r}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varphi=0.\end{aligned} \tag{307}$$

În baza faptului că $Ce_n(\xi_0, q_{n,m})=0$ oricare ar fi $n\geqslant 0$ și $m\geqslant 1$, tragem concluzia că

$$f_{p,r}(\xi_0,\varphi)\frac{\partial f_{n,m}}{\partial\xi}(\xi_0,\varphi)-f_{n,m}(\xi_0,\varphi)\frac{\partial f_{p,r}}{\partial\xi}(\xi_0,\varphi)=0, \tag{308}$$

$$\varphi\in(0, 2\pi).$$

Pe de altă parte, ținînd seama de dezvoltările (243) și (244) avem și identitatea

$$f_{p,r}(0,\varphi)\frac{\partial f_{n,m}}{\partial\xi}(0,\varphi)-f_{n,m}(0,\varphi)\frac{\partial f_{p,r}}{\partial\xi}(0,\varphi)=0,\quad \varphi\in(0, 2\pi), \tag{309}$$

astfel că prima integrală din (307) este nulă. Ținînd seama de 2π — periodicitatea în raport cu φ a funcțiilor $f_{n,m}(\xi, \varphi)$, rezultă că și a doua integrală din (307) este nulă, deoarece integrandul este identic nul. În concluzie, dacă perechile (n, m) și (p, r) sînt diferite, avem $q_{n,m}-q_{p,r}\neq 0$ și deci relația (301) este adevărată. Formule asemănătoare se pot demonstra și relativ la sistemul de funcții

$$g_{n,m}(\xi,\varphi)=Se_n(\xi, q_{n,m})se_n(\varphi, q_{n,m}), \quad n\geqslant 1,\ m\geqslant 1, \tag{310}$$

unde $q_{n,m}$ sînt rădăcinile ecuației $Se_n(\xi_0, q)=0$ cu $\xi_0=$fixat.

3.6. ECUAȚII HIPERBOLICE – ECUAȚIA TELEGRAFIȘTILOR

Ne vom ocupa de cîteva probleme clasice pentru ecuația hiperbolică, plecînd de la forma ei canonică

$$u_{xy}=a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u+f(x, y), \tag{311}$$

în care coeficienții a, b, c, f sînt funcții continui de variabilele x și y într-un domeniu din plan. Prima problemă se referă la găsirea unei soluții $u=u(x, y)$ care să ia valori prescrise pe două curbe caracteristice aparținînd la familii diferite. În cazul de față, caracteristicile sînt dreptele $x=c_1$, $y=c_2$.

Teorema 3.9. *În ipoteza a, b, c, f continui pentru $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ există o singură soluție a ecuației* (311), *care satisface condițiile*

$$u(x, 0)=\varphi(x),\ x\geqslant 0,\quad u(0, y)=\psi(y),\quad y\geqslant 0, \tag{312}$$

unde φ și ψ sînt două funcții date de clasă C^1, îndeplinind condiția de racordare $\varphi(0)=\psi(0)$.

Demonstrație (schiță). Vom transforma ecuația (311) într-o ecuație integro-diferențială echivalentă cu ea. Integrînd în raport cu x pe intervalul $[0, x]$, presupunînd y fixat, găsim

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)-\frac{\partial u}{\partial y}(0, y)=\int_0^x\Big[a(\xi, y)\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, y)+ \tag{313}$$

$$+b(\xi, y)\frac{\partial u}{\partial y}(\xi, y)+c(\xi, y)u(\xi, y)\Big]\mathrm{d}\xi+\int_0^x f(\xi, y)\mathrm{d}\xi.$$

Presupunînd aici x=fixat și integrînd în raport cu y pe intervalul $[0, y]$, ajungem la

$$u(x, y)=\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y \mathrm{d}\eta\int_0^x f(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi+ \tag{314}$$

$$+\int_0^y \mathrm{d}\eta\int_0^x\Big[a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, \eta)+b(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta)+$$

$$+c(\xi, \eta)u(\xi, \eta)\Big]\mathrm{d}\xi,$$

pentru orice $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Reciproc, plecînd de la (314), prin derivare repetată în raport cu y și apoi cu x, se ajunge la ecuația (311) cu condițiile la limită (312). Aproximațiile succesive pentru (314) sînt un șir de funcții care se definesc astfel

$$u_0(x, y)=0$$

$$u_1(x, y)=\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

$$u_2(x, y)=\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta+$$

$$+\int_0^y\int_0^x\Big[a(\xi, \eta)\frac{\partial u_1}{\partial \xi}+b(\xi, \eta)\frac{\partial u_1}{\partial \eta}+c(\xi, \eta)u_1\Big]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{315}$$

. . . . . .

$$u_{n+1}(x, y)=\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta+$$

$$+\int_0^y\int_0^x\Big[a(\xi, \eta)\frac{\partial u_n}{\partial \xi}+b(\xi, \eta)\frac{\partial u_n}{\partial \eta}+c(\xi, \eta)u_n\Big]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

. . . . . .

Observăm că pentru n fixat, $u_n=u_n(x, y)$ este de clasă C^1 în primul cadran $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ și că putem scrie relațiile evidente

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}=\varphi'(x)+\int_0^y f(x, \eta)\mathrm{d}\eta+$$

$$+\int_0^y\Big[a(x, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}(x, \eta)+b(x, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta}(x, \eta)+c(x, \eta)u_{n-1}(x, \eta)\Big]\mathrm{d}\eta$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y}=\psi'(y)+\int_0^x f(\xi, y)\mathrm{d}\xi+\int_0^x\Big[a(\xi, y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi}(\xi, y)+ \tag{316}$$

$$+b(\xi, y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}(\xi, y)+c(\xi, y)u_{n-1}(\xi, y)\Big]\mathrm{d}\xi.$$

Folosind (315) și (316) se poate arăta (prin inducție) că în orice pătrat $0 \leqslant x,\ y \leqslant A$, seriile de funcții

$$(317)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(u_{n+1}(x,y)-u_n(x,y)),\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}-\frac{\partial u_n}{\partial x}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}-\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)$$

converg uniform, adică șirurile de funcții continui

$$(318)\qquad \{u_n(x,y)\},\ \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right\},\ \left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right\},\ n=1,2,3,\ldots$$

sînt uniform convergente. Trecînd la limită în relația de recurență (315) și ținînd seama de teorema referitoare la derivarea limitei unui șir uniform convergent de funcții derivabile, ajungem la concluzia că $u(x,y)=\lim_{n\to\infty} u_n(x,y)$ satisface ecuația (311) și condițiile (312) pentru $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$, deoarece în raționamentul precedent A putea fi luat arbitrar de mare. Se poate arăta că soluția astfel obținută este unică. Metoda expusă are importanță mai mult teoretică, deoarece în practică este greu să găsim soluția $u=u(x,y)$ folosind aproximațiile succesive.

Observația 1. În cazul particular al ecuației

$$(319)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f(x,y),\qquad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,$$

cu condițiile $u(x,0)=\varphi(x)$, $u(0,y)=\psi(y)$ soluția u este dată de formula

$$(320)\qquad u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

Observația 2. Pentru ecuația (311) condițiile la limită pot fi date într-o formă mai generală și anume

$$(321)\qquad u(x,y_0)=\varphi(x),\quad u(x_0,y)=\psi(y),$$

unde φ și ψ sînt de clasă C^1, satisfăcînd condiția de racordare $\varphi(x_0)=\psi(y_0)$. Existența și unicitatea soluției $u=u(x,y)$ a problemei (311)+(321) se arată prin aceeași metodă a aproximațiilor succesive.

Altă problemă clasică pentru ecuația hiperbolică constă în găsirea unei soluții $u=u(x,y)$ care, împreună cu una din derivatele sale parțiale de ordinul întîi u_x sau u_y, să ia valori prescrise pe o curbă dată. Aceasta se numește problema lui Cauchy și în cele ce urmează vom expune metoda lui Riemann de rezolvare a ei. În acest scop, avem nevoie de unele chestiuni pregătitoare. Vom scrie ecuația hiperbolică în forma

$$(322)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y),$$

unde $a=a(x,y)$ și $b=b(x,y)$ sînt de clasă C^1, iar $c=c(x,y)$ și $f=f(x,y)$ sînt două funcții continui. Scriind

$$(323)\qquad L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u,$$

definim un operator diferențial care face ca fiecărei funcții u de clasă C^2, să-i corespundă funcția continuă notată $L(u)$. Prin formula

$$(324)\qquad M(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(a(x,y)v)-\frac{\partial}{\partial y}((b(x,y)v)+c(x,y)v,$$

definim pe aceeași clasă operatorul adjunct al lui $L(u)$. Folosind și notațiile

$$(325)\qquad P_1=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+auv=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(uv)-u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)$$

$$P_2=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+buv=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(uv)-u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right),$$

are loc o formulă de tip Green și anume

$$(326)\qquad \iint_D [vL(u)-uM(v)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_C P_1\,\mathrm{d}y-P_2\,\mathrm{d}x,$$

unde C este o curbă închisă, conținută împreună cu tot cu interiorul său D în domeniul comun de definiție al funcțiilor u, v, a, b, c. Aplicînd formula Green

$$(327)\qquad \int_C P_1\,\mathrm{d}y-P_2\,\mathrm{d}x=\iint_D\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

ajungem la (326), după ce observăm că expresia de sub semnul integralei duble în relația precedentă, se poate scrie în forma $vL(u)-uM(v)$.

Fie arcul de curbă AB de ecuație $y=\alpha(x)$, cu proprietatea că orice paralelă la una din axe îl taie cel mult într-un punct. Vom admite că $y=\alpha(x)$ este o funcție cu derivată continuă.

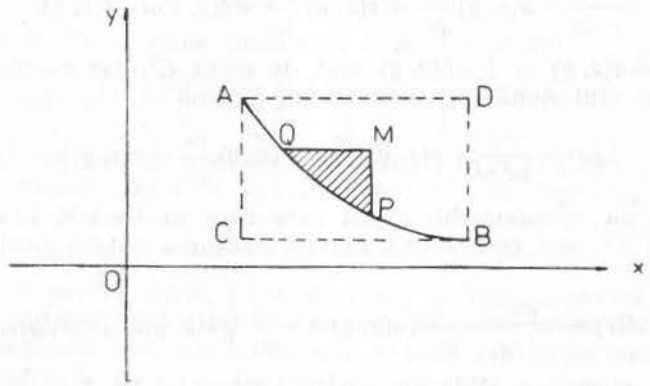

Fig. 3.7.

Fie M de coordonate fixate (x_0, y_0) un punct din dreptunghiul $ABCD$ și P, Q punctele în care paralele la Oy, respectiv Ox întîlnesc arcul AB. Notăm cu Ω domeniul haşurat și cu Γ frontiera sa. Dacă $u=u(x, y)$ și $v=v(x, y)$ sînt două soluții oarecare ale ecuațiilor $L(u)=0$ și $M(v)=0$, ținînd seama de (326) putem scrie

$$\int_\Gamma P_1dy-P_2dx=\int_{QP} P_1dy-P_2dx+\int_{PM} P_1dy-\int_{MQ} P_2dx=0. \tag{328}$$

Pe de altă parte, ținînd seama de (325), vom avea

$$\int_{PM} P_1dy=\iint_{PM}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(uv)-u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)\right]dy=\frac{1}{2}[(uv)_M-(uv)_P]-$$

$$-\int_{PM} u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)dy \tag{329}$$

și în mod analog

$$\int_{QM} P_2dx=\iint_{QM}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(uv)-u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right)\right]dx=\frac{1}{2}[(uv)_M-(uv)_Q]-$$

$$-\int_{QM} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right)dx. \tag{330}$$

Înlocuind (330) și (329) în (328), se obține

$$(uv)_M=\frac{1}{2}[(uv)_P+(uv)_Q]-\int_{QP}P_1dy-P_2dx+$$

$$+\int_{QM} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right)dx+\int_{PM} u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)dy. \tag{331}$$

Dacă am putea alege soluția $v=v(x, y)$ a ecuației omogene $M(v)=0$ astfel încît $v(x_0, y_0)=1$ și în plus

$$\frac{\partial v}{\partial x}-bv=0 \text{ pe } QM,\quad \frac{\partial v}{\partial y}-av=0 \text{ pe } PM, \tag{332}$$

formula (331) ar avea un aspect mai simplu, și anume

$$u(M)=\frac{1}{2}[(uv)_P+(uv)_Q]=\int_{QP} P_1dy-P_2dx, \tag{333}$$

unde P_1 și P_2 sînt dați de (325). Condițiile impuse lui v sînt echivalente cu faptul că ea satisface ecuația

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(a(x, y)v)-\frac{\partial}{\partial y}(b(x, y)v)+c(x, y)v=0 \tag{334}$$

și condițiile inițiale

$$v(x, y_0)=e^{\int_{x_0}^{x} b(s,y_0)ds},\quad v(x_0, y)=e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0,s)ds}, \tag{335}$$

iar din Teorema 3.9 rezultă că o astfel de funcție există și este unică. Este însă evident că funcția v depinde și de M, adică depinde și de variabilele x_0 și y_0. Prin urmare, este mai corect să scriem:

$$v=v(x, y;\ x_0, y_0), \tag{336}$$

unde x și y sînt coordonatele unui punct curent din dreptunghiul $ABCD$, iar x_0 și y_0 sînt coordonatele punctului fixat M. Cu această precizare, putem spune că funcția $v=v(x, y; x_0, y_0)$ satisface ecuația (334) în variabilele x și y, precum și condițiile inițiale

$$(337)\qquad v(x, y_0; x_0, y_0)=e^{\int_{x_0}^{x} b(s,y_0)\,ds}, \quad v(x_0, y; x_0y_0) = e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0,s)\,ds}$$

Condiția de racordare, care în mod evident este îndeplinită, ne spune că $v(x_0, y_0; x_0,y_0)=1$.

Definiția 3.5. Funcția $v=v(x, y; x_0, y_0)$ cu proprietățile enumerate se numește funcția lui Riemann a ecuației hiperbolice (322).

Aflarea funcției v se reduce la problema cu date pe caracteristice (311)+(321) care, după cum se știe, este destul de complicată. Să presupunem pentru moment că funcția v este cunoscută și că pe arcul AB se cunoaște valoarea unei soluții $u=u(x, y)$ a ecuației

$$(338)\qquad L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=0,$$

precum și valoarea derivatei sale parțiale în raport cu y. Mai precis, să presupunem că au loc relațiile

$$(339)\qquad u(x, \alpha(x))=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, \alpha(x))=\psi(x),$$

unde φ este o funcție de clasă C^1, iar ψ este o funcție continuă dată. De aici rezultă și valorile lui $\partial u/\partial x$ pe arcul AB. În adevăr, derivînd în raport cu x prima egalitate (339), găsim

$$(340)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x, \alpha(x))+\frac{\partial u}{\partial y}(x, \alpha(x))\alpha'(x)=\varphi'(x),$$

adică $u_x(x, \alpha(x))=\varphi'(x)-\psi(x)\alpha'(x)$. Formula (333) ne dă atunci valoarea lui u în fiecare punct M din dreptunghiul $ABCD$, numai în funcție de cantități cunoscute, deoarece în membrul doi al acestei egalități apar numai valorile lui u și v, precum și ale derivatelor lor de primul ordin, calculate de-a lungul porțiunii QP a arcului AB. În rezumat putem enunța

Teorema 3.10. *Dacă ecuația hiperbolică* (338) *admite în dreptunghiul $ABCD$ o soluție $u=u(x, y)$ satisfăcînd* (339), *aceasta este unică și dată de formula* (333).

Pe de altă parte, se poate arăta că funcția $u=u(x, y)$ dată de (333) este în adevăr soluția (338)+(339), calculînd efectiv derivatele u_x, u_y și u_{xy}, dar nu vom mai face această verificare. Se poate da atunci un enunț mai complet și anume:

Teorema 3.11. *Ecuația hiperbolică* (338) *cu condițiile inițiale* (339) *admite în dreptunghiul dat soluție unică $u=u(x, y)$, dată prin formula*

$$(341)\qquad u(M)=\frac{1}{2}[(uv)_P+(uv)_Q]-\int_{QP} P_1\,dy-P_2\,dx,$$

în care v este funcția Riemann, iar P_1 și P_2 sînt dați de (325).

Să revenim acum la ecuația (322) și să observăm că ea poate fi scrisă în forma $L(u)=f$. Din formula lui Green (326) se obține atunci

$$(342)\qquad \int_\Gamma P_1\,dy-P_2\,dx=\iint_\Omega v(x, y; x_0, y_0)f(x,y)\,dx\,dy,$$

unde $u=u(x, y)$ este o soluție oarecare pentru (322), iar v este funcția Riemann atașată lui (322). Refăcînd pentru integrala din primul membru calculele precedente, se găsește de data aceasta pentru $u(M)$ expresia:

$$(343)\qquad u(M)=\frac{1}{2}[(uv)_P+(uv)_Q]-$$

$$-\int_{QP} P_1\,dy-P_2\,dx+\iint_\Omega v(x, y; x_0, y_0)f(x, y)\,dx\,dy,$$

unde în partea dreaptă a egalității sînt numai cantități cunoscute. Putem sintetiza astfel toate concluziile referitoare la problema lui Cauchy pentru ecuația considerată

Teorema 3.12. *Ecuația hiperbolică*

$$(344)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y),$$

în care a și b sînt de clasă C^1, iar c și f sînt continui în dreptunghiul $ABCD$, admite soluție unică u satisfăcînd condițiile (339), *dată prin formula* (343) *în care v este funcția lui Riemann, iar P_1 și P_2 sînt dați de* (325).

Observația 1. Dacă datele inițiale sînt nule, adică dacă soluția u și derivata sa u_y se anulează pe AB

$$u(x,\alpha(x))=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,\alpha(x))=0, \tag{345}$$

atunci, după cum știm se anulează și u_x de-a lungul lui AB. Soluția problemei (344)+(339) este dată în acest caz de

$$u(M)=u(x_0,y_0)=\iint_{\Omega} v(x,y;\ x_0,y_0)f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{346}$$

Observația 2. Dacă datele inițiale φ și ψ sînt nenule, punînd

$$u=U+\varphi(x)+(y-\alpha(x))\,\psi(x) \tag{347}$$

și luînd U noua funcție necunoscută, se ajunge la concluzia că ea satisface ecuația

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+a(x,\ y)\frac{\partial U}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial U}{\partial y}+c(x,\ y)U=F(x,\ y), \tag{348}$$

unde F se exprimă prin coeficienții ecuației vechi (344) și prin cantitățile cunoscute $\varphi(x)$, $\psi(x)$ și $\alpha(x)$. Simplificarea provine din faptul că noile condiții inițiale sînt nule, adică

$$U(x,\ \alpha(x))=0,\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,\ \alpha(x))=0 \tag{349}$$

și prin urmare vom avea

$$U(M)=U(x_0,y_0)=\iint_{\Omega} v(x,y;\ x_0,\ y_0)F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{350}$$

unde v este funcția Riemann pentru (348), care coincide de fapt cu cea pentru (344), căci termenul liber al ecuației nu intră în condițiile care definesc pe v. Toată dificultatea problemei se reduce exclusiv la aflarea funcției $v=v(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$.

Observația 3. Formula (343), cît și (346) care este o consecință directă a sa, este valabilă oricare ar fi poziția punctului M în dreptunghiul $ABCD$, adică indiferent dacă M se află situat

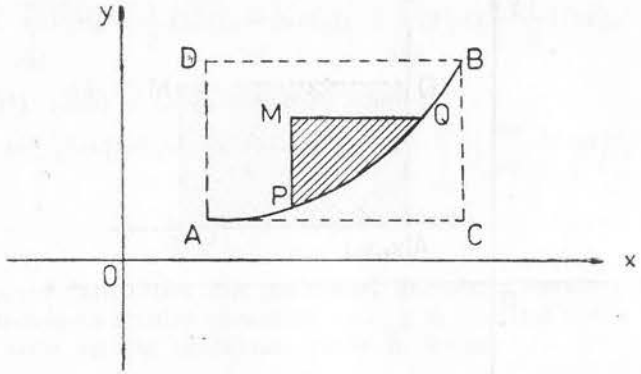

Fig. 3.8

deasupra arcului AB sau sub acest arc. Totuși, forma curbei AB influențează expresia analitică a soluției căutate $u=u(M)$. Anume, dacă se admite că funcția $y=\alpha(x)$ este strict crescătoare în raport cu x atunci, prin aplicarea corectă a aceleiași formule (326), se obține

$$u(M)=\frac{1}{2}[(uv)_P+(uv)_Q]- \tag{351}$$

$$-\int_{QP} P_1\mathrm{d}y-P_2\mathrm{d}x-\iint_{\Omega} v(x,y;\ x_0,\ y_0)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

pentru soluția problemei (344)+(339) și respectiv

$$u(M)=-\iint_{\Omega} v(x,y;\ x_0,\ y_0)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{352}$$

pentru soluția problemei (344)+(345).

Observația 4. Presupunînd cunoscută funcția v atașată ecuației (344), putem exprima soluția u a problemei cu date pe caracteristice

$$L(u)=f,\ u(x,y_0)=\varphi(x),\ u(x_0,y)=\psi(y) \tag{353}$$

a cărei existență și unicitate este garantată de teorema 3.9.

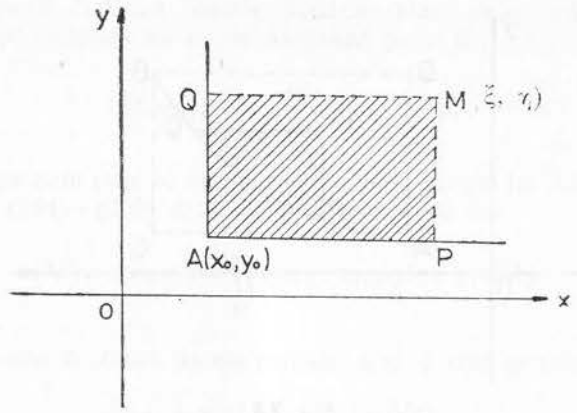

Fig. 3.9

Luînd în formula (326) drept domeniu D dreptunghiul $APMQ$, vom găsi

$$\iint_D v(x,y;\,\xi,\eta)f(x,y)\,dx\,dy=\int_{APMQA} P_1\,dy-P_2\,dx. \tag{354}$$

Deoarece expresiile P_1 şi P_2 pot fi scrise şi în forma

$$P_1=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(uv)+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+au\right)$$
$$P_2=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(uv)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right), \tag{355}$$

vom avea

$$\int_{AP} P_1\,dy-P_2\,dx=-\int_{AP} P_2\,dx=\frac{1}{2}[(uv)_P-(uv)_A]-\int_{AP} v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)dx \tag{356}$$

$$\int_{QA} P_1\,dy-P_2\,dx=\int_{QA} P_1\,dy=\frac{1}{2}[(uv)_Q-(uv)_A]+\int_{QA} v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+au\right)dy.$$

Pe de altă parte, folosind relaţiile (325) şi proprietăţile funcţiei v, obţinem că

$$\int_{PM} P_1\,dy=\frac{1}{2}[(uv)_M-(uv)_P],\quad -\int_{MQ} P_2\,dx=\frac{1}{2}[(uv)_M-(uv)_Q]. \tag{357}$$

Din (354), (356) şi (357) găsim în final că

$$u(\xi,\eta)=(uv)_A+\int_{AP} v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)dx+\int_{AQ} v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+au\right)dy+ \tag{358}$$
$$+\iint_D v(x,y;\,\xi,\eta)f(x,y)\,dx\,dy,$$

unde toate cantităţile din membrul doi sînt cunoscute. Notînd coordonatele punctului curent M cu x, y şi folosind datele iniţiale, putem scrie soluţia problemei (353) în forma

$$u(x,y)=v(x_0,y_0;\,x,y)\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x} v(s,y_0;\,x,y)(\varphi'(s)+ \tag{359}$$
$$+b(s,\,y_0)\varphi(s))\,ds+\int_{y_0}^{y} v(x_0,\,t;\,x,\,y)(\psi'(t)+a(x_0,\,t)\psi(t))\,dt+$$
$$+\iint_D v(s,t;\,x,y)f(s,t)\,ds\,dt,$$

în care reamintim că v este funcţia Riemann ataşată ecuaţiei $L(u)=f$.

Exemplul 1. Să luăm ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c^2u=0, \tag{360}$$

în care $c>0$ este o constantă. Funcţia v trebuie să verifice ecuaţia adjunctă $v_{xy}+c^2v=0$ şi condiţiile iniţiale

$$v(x,y_0;\,x_0,y_0)=1,\quad v(x_0,y;\,x_0,y_0)=1, \tag{361}$$

deoarece în acest caz $a(x,y)=b(x,y)=0$. Căutînd v în forma $v=F(z)$, unde $z=(x-x_0)(y-y_0)$, se obţine prin derivare

$$\frac{\partial v}{\partial x}=F'(z)(y-y_0),\quad \frac{\partial v}{\partial y}=F'(z)(x-x_0),\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=F''(z)z+F'(z), \tag{362}$$

care arată că $F=F(z)$ trebuie să verifice condiţia

$$zF''(z)+F'(z)+c^2F(z)=0. \tag{363}$$

Punînd $F(z)=G(2c\sqrt{z})$, ajungem la concluzia că $G=G(t)$ trebuie să satisfacă ecuația

$$tG''(t)+G'(t)+tG(t)=0, \tag{364}$$

care este un caz particular ($\nu=0$) al ecuației lui Bessel. Ecuația (364) admite soluția particulară

$$G(t)=J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}, \tag{365}$$

olomorfă în tot planul complex. Prin urmare

$$v(x,y;\ x_0,y_0)=J_0(2c\sqrt{(x-x_0)(y-y_0)}), \tag{366}$$

satisface ecuația adjunctă dar, deoarece $J_0(0)=1$, se observă că au loc și egalitățile (361), adică v dat de (366) este chiar funcția Riemann atașată lui (360). În expresia lui v nu intră de fapt nici un radical, deoarece $J_0(t)$ conține numai puteri pare ale variabilei t.

Aplicînd formula (359) în care luăm $x_0=y_0=$p, putem enunța:

Propoziția 3.11. *Soluția ecuației* (360) *cu condițiile inițiale*

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u(0,y)=\psi(y);\ \varphi,\psi\in C^1 \text{ și } \varphi(0)=\psi(0) \tag{367}$$

este dată de formula

$$u(x,y)=J_0(2c\sqrt{xy})\,\varphi(0)+\int_0^x J_0(2c\sqrt{y(x-t)})\,\varphi'(t)\,dt+ \tag{368}$$
$$+\int_0^y J_0(2c\sqrt{x(y-t)})\,\psi'(t)\,dt.$$

Exemplul 2. Să luăm acum ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-c^2u=0,\quad c=\text{constantă}>0. \tag{369}$$

Funcția Riemann satisface $v_{xy}-c^2v=0$ și condițiile (361). Căutînd-o în forma $v=F(z)$ cu $z=(x-x_0)(y-y_0)$, ajungem la ecuația

$$zF''(z)+F'(z)-c^2F(z)=0, \tag{370}$$

în care dacă punem $F(z)=G(2c\sqrt{z})$, obținem pentru $G=G(t)$

$$tG''(t)+G'(t)-tG(t)=0, \tag{371}$$

care este un caz particular al ecuației modificate a lui Bessel.

Ea admite soluția particulară

$$G(t)=I_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}, \tag{372}$$

olomorfă în tot planul complex finit și conținînd numai puteri pare ale variabilei t. Se observă că

$$v(x,y;\ x_0,y_0)=I_0(2c\sqrt{(x-x_0)(y-y_0)}), \tag{373}$$

satisface toate condițiile cerute pentru funcția Riemann corespunzătoare lui (369). În concluzie, putem enunța

Propoziția 3.12. *Soluția ecuației* (369) *cu condițiile* (367) *este dată de formula*

$$u(x,y)=I_0(2c\sqrt{xy})\,\varphi(0)+\int_0^x I_0(2c\sqrt{y(x-t)})\,\varphi'(t)\,dt+ \tag{374}$$
$$+\int_0^y I_0(2c\sqrt{x(y-t)})\,\psi'(t)\,dt.$$

Exemplul 3. (*Ecuația telegrafiștilor*). Se numește așa ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-(LG+RC)\frac{\partial v}{\partial t}-RGv=0, \tag{375}$$

în care funcția necunoscută $v=v(x,t)$ este diferența de potențial în raport cu pămîntul în cazul vibrațiilor electrice cvasistaționare, iar L, C, G, R sînt constante cu semnificație fizică bine precizată. Putem face să dispară termenul ce conține derivata v_t, punînd

$$v(x,t)=e^{-\lambda t}u(x,t),\ \lambda=\text{constant} \tag{376}$$

și luînd u noua funcție necunoscută. Derivînd și înlocuind în (375) se constată că dacă luăm $\lambda=(LG+RC)/2LC$ se ajunge la ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b^2u=0, \tag{377}$$

în care $a^2=1/LC$, iar $b=(LG-RC)/2LC$. Să găsim soluția $u=u(x,t)$ a ecuației (377), cu condițiile inițiale

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), \tag{378}$$

unde φ de clasă C^2 și ψ de clasă C^1 sînt două funcții date. Să aducem (377) la forma canonică; ecuația caracteristică asociată este $(x')^2-a^2=0$, iar $x-at$ și $x+at$ sînt două integrale prime

funcțional independente ale sale. Luînd noi variabile independente x' și y' prin substituțiile

(379) $$x'=x-at, \quad y'=x+at,$$

obținem din (377) ecuația

(380) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x'\,\partial y'}+c^2u=0, \quad \text{unde } c=\frac{b}{2a},$$

iar din (378) noile condiții inițiale

(381) $$u(x',x')=\varphi(x'), \quad \frac{\partial u}{\partial y'}(x',x')-\frac{\partial u}{\partial x'}(x',x')=\frac{1}{a}\psi(x').$$

Altfel spus, pentru ecuația (380) avem de găsit soluția $u=u(x',y')$ care ia valori prescrise pe prima bisectoare $y'=x'$ din planul variabilelor noi și pentru care diferența derivatelor $u_{y'}-u_{x'}$, este de asemenea dată de-a lungul aceleeași bisectoare. Ne vom referi la formula (326), avînd în vedere că știm funcția Riemann $v=v(x',y';\ x_0,y_0)$ pentru ecuația (380)

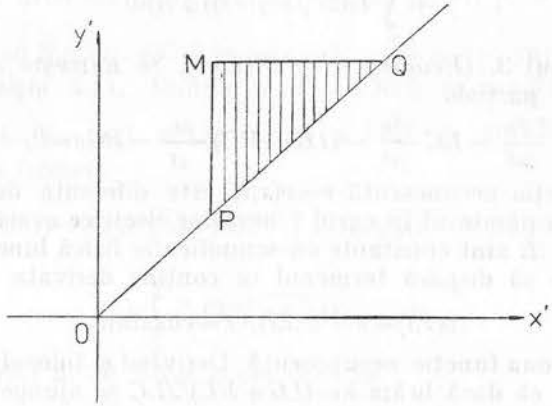

Fig. 3.10

Să notăm pentru moment cu x_0', y_0' coordonatele punctului M și să scriem că integrala expresiei $P_1dy'-P_2dx'$ pe conturul $MPQM$ este nulă, observînd mai întîi că

(382) $$\int_{PQ} P_1dy'-P_2dx'=\int_{PQ}(P_1-P_2)dx'=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{PQ}\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial y'}-\frac{\partial u}{\partial x'}\right)-u\left(\frac{\partial v}{\partial y'}-\frac{\partial v}{\partial x'}\right)\right]dx'.$$

Diferența $u_{y'}-u_{x'}$ este cunoscută în punctele de pe prima bisectoare, iar un calcul elementar arată că pe aceeași bisectoare

(383) $$\frac{\partial v}{\partial y'}-\frac{\partial v}{\partial x'}=\frac{2c(y_0'-x_0')}{\sqrt{(x'-x_0')(x'-y_0')}}J_0'(2c\sqrt{(x'-x_0)(x'-y_0')}).$$

Folosind expresia cunoscută

(384) $$u(M)=\frac{1}{2}[(uv)_P+(uv)_Q]+\int_{PQ}P_1dy'-P_2dx'$$

și condițiile $(v)_P=(v)_Q=J_0(0)=1$, precum și datele inițiale (381), vom putea deduce cu ajutorul lui (382) și (383) că

(385) $$u_0'(x,'y_0')=\frac{1}{2}(\varphi(x_0')+\varphi(y_0'))+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x_0'}^{y_0'}J_0(2c\sqrt{(x'-x_0)(x'-y_0)})\,\psi(x')dx-$$
$$-\frac{c}{2}(y_0'-x_0')\int_{x_0'}^{y_0'}\frac{J_0(2c\sqrt{(x'-x_0')(x'-y_0')})}{\sqrt{(x'-x_0')(x'-y_0')}}\varphi(x')dx'.$$

Dacă am nota cu x' și y' coordonatele punctului curent M din planul $x'Oy'$, valoarea $u(x',y')$ s-ar obține din formula precedentă prin înlocuirea lui x_0' cu x' și a lui y_0' cu y', variabila de integrare fiind notată cu s de data aceasta. Vom trece peste această etapă, dar pentru a reveni la variabilele vechi x și t, va trebui să ținem seama că $x'=x-at$ și $y'=x+at$. În final vom putea enunța:

Propoziția 3.13. *Soluția problemei* (377)+(378) *este dată de formula*

(386) $$u(x,\ t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}J_0(2c\sqrt{(s-x)^2-a^2t^2})\,\psi(s)ds-$$
$$-act\int_{x-at}^{x+at}\frac{J_0'(2c\sqrt{(s-x)^2-a^2t^2})}{\sqrt{(s-x)^2-a^2t^2}}\varphi(s)ds.$$

Observația 1. Deoarece funcția $J_0(t)$ conține numai puteri pare ale variabilei t, în formula precedentă radicalul nu apare în mod efectiv, astfel că nu trebuie să deranjeze faptul că expresia de sub acest radical este $\leqslant 0$. Dacă se ține seama că $J_0(\sqrt{x}) = I_0(\sqrt{-x})$, putem transcrie formula precedentă astfel

$$(386)' \qquad u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I_0(2c\sqrt{a^2t^2-(s-x)^2})\,\psi(s)\,ds+$$
$$+act\int_{x-at}^{x+at}\frac{I_0'(2c\sqrt{a^2t^2-(s-x)^2})}{\sqrt{a^2t^2-(s-x)^2}}\,\varphi(s)\,ds.$$

Observația 2. Dacă se pleacă direct de la ecuația (375) cu condițiile inițiale

$$(387) \qquad v(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=\psi(x),$$

atunci, în baza substituțiilor făcute, rezultă că soluția căutată este

$$(388) \qquad v(x,t)=e^{-\lambda t}u(x,t),\quad \lambda=\frac{LG+RC}{2LC}.$$

unde $u=u(x,t)$ satisface ecuația (377) și condițiile inițiale

$$(389) \qquad u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)+\lambda\varphi(x).$$

Observația 3. Să considerăm ecuația neomogenă

$$(390) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b^2u=f(x,t),$$

cu condiții inițiale nule

$$(391) \qquad u(x,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

Făcînd schimbarea de variabile (379), ajungem la ecuația

$$(392) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x'\,\partial y'}+c^2u=f_1(x',y'),\qquad c=\frac{b}{2a},$$

în care funcția f_1 se definește prin condiția

$$(393) \qquad f_1(x',y')=-\frac{1}{4a^2}f\left(\frac{x'+y'}{2},\frac{y'-x'}{2a}\right).$$

Noile condiții inițiale vor lua forma

$$(394) \qquad u(x',x')=0,\ \frac{\partial u}{\partial y'}(x',x')-\frac{\partial u}{\partial x'}(x',x')=0.$$

Vom aplica formula (326) perechii de funcții $u=u(x',y')$ și $v=v(x',y';\ x_0',y_0')$, unde u este soluția problemei (392)+(394), iar v este funcția lui Riemann atașată lui (392). De data aceasta, vom obține

$$(395) \qquad u(M)=u(x_0',y_0')=-\iint_\Omega v(x',y';\ x_0',y_0')f_1(x',y')\,dx'\,dy',$$

unde Ω este domeniul haşurat din fig. 3.10. Dacă în integrala dublă care apare aici facem schimbarea de variabile independente

$$(396) \qquad x'=s-a\tau,\quad y'=s+a\tau,$$

se vede imediat că triunghiul MPQ trece în triunghiul $M_1P_1Q_1$ din planul variabilelor s și τ.

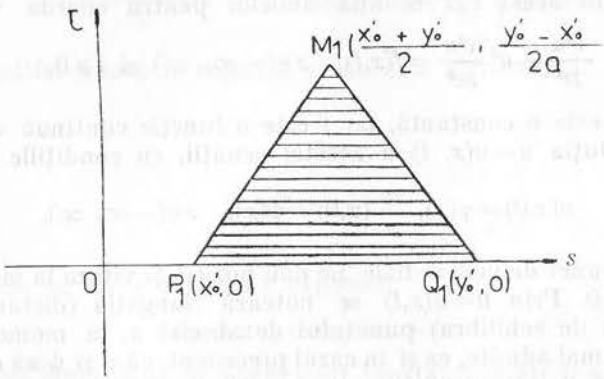

Fig. 3.11

Deoarece $f_1(x',y')=(-1/4a^2)f(s,\tau)$, iar iacobianul transformării (396) este egal cu $2a$, deducem din (395) că

$$(397) \qquad u(x_0',y_0')=\frac{1}{2a}\int_0^{(y_0'-x_0')/2a} d\tau\int_{x_0'+a\tau}^{y_0'-a\tau} v(s-a\tau,\ s+a\tau;\ x_0',y_0')f(s,\tau)\,ds.$$

Notînd cu x' şi y' coordonatele punctului curent M din planul $x'Oy'$, valoarea $u(x',y')$ se obţine din (397) prin înlocuirea lui x_0' cu x' şi a lui y_0' cu y'. Vom trece, bineînţeles, peste această etapă, dar pentru a reveni la vechile variabile x şi y vom ţine seama de (379). Folosind şi expresia lui v, vom ajunge în final la concluzia următoare:

Propoziţia 3.14. *Soluţia problemei* (390)+(391) *este dată de formula*

$$(398)\quad u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} J_0(2c\sqrt{(x-s)^2-a^2(t-\tau)^2})f(s,\tau)\mathrm{d}s,$$

în care constanta $c=b/2a$.

Acum se poate scrie imediat şi soluţia ecuaţiei neomogene (390) cu condiţii iniţiale nenule (378). În baza liniarităţii ecuaţiei studiate, rezultă că soluţia problemei (390)+(378) este suma soluţiilor problemelor (377)+(378) şi respectiv (380)+(391).

Să admitem acum că în (390) coeficientul b este egal cu zero; obţinem în acest caz ecuaţia undelor pentru coarda vibrantă

$$(399)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\quad x\in(-\infty,\ \infty)\ \text{şi}\ t\geqslant 0,$$

în care a este o constantă, iar f este o funcţie continuă dată. Să găsim soluţia $u=u(x,\ t)$ a acestei ecuaţii, cu condiţiile iniţiale:

$$(400)\quad u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x),\quad x\in(-\infty,\ \infty),$$

care din punct de vedere fizic ne dau poziţia şi viteza la momentul iniţial $t=0$. Prin $u=u(x,t)$ se notează elongaţia (distanţa faţă de poziţia de echilibru) punctului de abscisă x, la momentul de timp t. Se mai admite, ca şi în cazul precedent, că φ şi ψ au derivate de ordinul doi şi respectiv unu, continui pe axa reală. Făcînd schimbarea de variabile (379), ajungem de data aceasta la ecuaţia

$$(401)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x'\,\partial y'}=f_1(x',y'),$$

în care f_1 este cel definit de relaţia (393). Dacă se observă că pentru această ecuaţie funcţia lui Riemann $v=v(x',\ y';\ x_0',\ y_0')$ este identic egală cu unu şi că toate celelalte concluzii din cazul general ($b\neq 0$) rămîn, bineînţeles, valabile, atunci putem enunţa:

Propoziţia 3.15. *Soluţia ecuaţiei undelor* (399) *cu condiţiile iniţiale* (400) *este dată de formula*

$$(402)\quad u(x,\ t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\mathrm{d}s.$$

Această formulă este cunoscută şi sub numele de formula lui d'Alembert pentru ecuaţia corzii vibrante infinite. În particular, dacă $f(x,t)\equiv 0$ se obţine pentru soluţia problemei

$$(403)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\qquad u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$$

următoarea expresie

$$(404)\quad u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

care dealtfel poate fi regăsită şi pe cale elementară.

EXERCIŢII

1) Să se arate că forma canonică

$$u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0,$$

a ecuaţiei hiperbolice cu coeficienţi constanţi poate fi simplificată dacă punem $u=v\,exp(\lambda x+\mu y)$ şi luăm v drept noua funcţie necunoscută.

Rezolvare. După calcularea derivatelor parţiale şi înlocuire în ecuaţia dată, se obţine

$$v_{xy}+(\mu+a)v_x+(\lambda+b)v_y+(c+a\lambda+b\mu+\lambda\mu)v=0.$$

Dacă luăm $\lambda=-b$ şi $\mu=-a$, se ajunge la forma simplificată

$$v_{xy}+(c-ab)v=0.$$

2. Soluția generală a ecuației $u_{xy}+A(x,y)u_x=0$ în dreptunghiul $D=\{(x,\ y;\ |x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b\}$ este de forma

$$u(x,y)=f(y)+\int_{x_0}^{x} g(s)e^{-\int_{y_0}^{y}A(s,t)dt}\,ds,$$

în care f și g sînt funcții arbitrare de clasă C^2 și respectiv C^1. Se presupune că $A=A(x,y)$ este de clasă C^1 în D.

Indicație. Notînd $u_x=v$, ecuația se scrie $v_y+A(x,y)v=0$. Interpretînd pe x ca un parametru constant, ultima ecuație se poate scrie în forma $(dv/dy)+Av=0$, de unde se poate afla v. O integrare a funcției găsite, în raport cu variabila x, considerîndu-l de data aceasta pe y drept parametru constant, ne duce la formula enunțată.

3. Procedînd ca în exercițiul precedent, să se afle soluția generală a ecuației $u_{xy}+B(x,y)u_y=0$ în dreptunghiul D.

4. Să se aplice metoda funcției Riemann la rezolvarea problemei

$$u_{xy}+2u_x+u_y+2u=1,\quad u(x,1-x)=x,\quad u_x(x,1-x)=x.$$

Răspuns. Funcția lui Riemann este

$$v=e^{x-x_0+2(y-y_0)}.$$

Se găsește soluția următoare

$$u=\frac{1}{2}+(4-3y)e^{1-x-y}-\left(2x+\frac{3}{2}\right)e^{2(1-x-y)}.$$

5. Să se găsească soluția ecuației undelor

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),$$

cu condițiile inițiale

$$u|_{t=0}=f(r),\quad u_t|_{t=0}=g(r),\ \text{unde}\ r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2},$$

iar f și g sînt două funcții date, de clasă C^2 pentru $r\geqslant 0$.

Rezolvare. Trecînd la coordonate sferice r, θ, φ și notînd $u(x,y,z,t)=v(r,\theta,\varphi,t)$, observăm că deoarece datele inițiale depind numai de r (cazul simetriei centrale), putem lua $v=v(r,t)$. Ținînd seama de expresia laplacianului în coordonate sferice, putem reformula astfel problema dată

$$v_{tt}=a^2\left(v_{rr}+\frac{2}{r}v_r\right),\quad v(r,0)=f(r),\quad v_t(r,0)=g(r).$$

După ce găsim că soluția generală a ecuației în v este

$$v=\frac{F(r-at)+G(r+at)}{r},$$

cu F și G funcții arbitrare de clasă C^2, urmează să determinăm aceste funcții astfel încît să avem $v(r,0)=f(r)$ și $v_t(r,0)=g(r)$. În urma unui calcul elementar se ajunge la concluzia că soluția căutată are expresia:

$$u(r,\ t)=\frac{1}{2r}[(r-at)f(r-at)+(r+at)g(r+at)]+\frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}\tau g(\tau)\,d\tau.$$

6. O linie fără distorsiuni ($R/L=G/C$) de lungime finită l este încărcată la un potențial E. Capătul $x=l$ este izolat, iar la momentul $t=0$ capătul $x=0$ este pus la pămînt. Să se demonstreze că potențialul în punctul x este

$$v=\frac{4E}{\pi}e^{-\beta t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

unde $\beta=R/L$ și $a^2=1/LC$.

Rezolvare. Potențialul v satisface ecuația cu derivate parțiale

$$v_{xx}-LCv_{tt}-(LG+RC)v_t-RGv=0,$$

pe care am numit-o ecuația telegrafiștilor. În plus, sînt îndeplinite și următoarele condiții inițiale și la limite

$$v(x,0)=E,\ v_t(x,0)=-\frac{R}{L}E,\ v(0,\ t)=0,\ v_x(l,\ t)=0.$$

Prima din aceste condiții se dă în enunț; același lucru se poate spune și despre ultimele două. Pentru a o deduce pe cealaltă, se pleacă de la ecuația

$$i_x+Cv_t+Gv=0,$$

în care $i=i(x,t)$ este intensitatea curentului. Deoarece avem $i(x,0)=0$, rezultă $i_x(x,0)=0$, ceea ce ne spune că

$$v_t(x,0)=-\frac{G}{C}\ v(x,0)=-\frac{R}{L}E.$$

Dacă facem substituția

$$v=e^{-\lambda t}u(x,t) \text{ cu } \lambda=\frac{LG+RC}{2LC}$$

se ajunge la ecuația

$$u_{tt}-a^2u_{xx}-b^2u=0 \text{ cu } a^2=\frac{1}{LC},\ b=\frac{LG-RC}{2LC}=0.$$

Problema se reduce la aflarea funcției u care satisface ecuația $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ și condițiile

$$u(x,0)=E,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0.$$

Căutăm soluții particulare de forma $u=X(x)T(t)$, care să verifice condițiile la limită. Separînd variabilele, obținem

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\mu^2=\text{constant},\ \mu>0$$

sau $X''(x)+\mu^2X(x)=0$ și $T''(t)+(\mu a)^2T(t)=0$. Rezultă $X(x)=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$, dar deoarece $X(0)=0$, trebuie să luăm $c_1=0$. Scriind că $X'(l)=0$, adică $\cos\mu l=0$, trebuie să luăm $\mu l=(2n+1)\pi/2$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Deci autovalorile problemei sînt numerele $\mu_n=(2n+1)\pi/2l$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Pentru fiecare n avem o soluție particulară

$$u_n=\left(a_n\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}+b_n\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Căutînd soluția problemei date în forma $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$ și impunîndu-i să satisfacă și datele inițiale, obținem

$$E=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},\quad 0<x<l,$$

de unde găsim

$$a_n=\frac{2E}{l}\int_0^l\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx=\frac{4E}{(2n+1)\pi},\ n=0, 1, 2, \ldots$$

Scriind că

$$u_t(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,\ t),\quad 0<x<l,\ t>0$$

și făcînd aici $t=0$, se obține $b_n=0$ pentru toți $n\geqslant 0$. În concluzie, am găsit că

$$u(x,\ t)=\frac{4E}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

și ținînd seama de legătura dintre v și u, putem spune că formula din enunț este adevărată, dacă facem notația $R/L=\beta$.

7. Să se afle soluția ecuației

$$u_{tt}-a^2u_{xx}+b^2u=0,\quad x\in(-\infty,\ \infty),\ t\geqslant 0,$$

cu condițiile inițiale

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x),\ x\in(-\infty,\ \infty).$$

Indicație. Metoda de rezolvare este identică cu cea folosită în cazul problemei (377)+(378) din text.

BIBLIOGRAFIE

1. Angot, André. *Compléments de mathematiques. A l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications.* Paris, 1957.
2. Bejan, I. și Balaban, G. *Automatizări și telecomenzi în electroenergetică.* Editura didactică și pedagogică, București 1976.
3. Churchill, R. V. and. Brown, J. W. *Fourier series and boundary value problems.* Mc Graw-Hill Book Company, 1978.
4. Ciorănescu, N. *Tratat de matematici speciale.* Editura didactică și pedagogică, București, 1963.
5. Creangă, I și Enescu, I. *Algebre.* Editura tehnică, București, 1973.
6. Cristescu, R. *Elemente de analiză funcțională și introducere în teoria distribuțiilor.* Editura tehnică, București, 1966.
7. Cristescu, R. și Marinescu, Gh. *Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor.* Editura Academiei R.P.R., București, 1966.
8. Cunningham, J. W. *Analyse non linéaire.* Dunod, Paris, 1963.
9. Director, S. W. and Rohrer, R. A. *Introduction to systems theory.* Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1972.
10. Ditkine, V. et Proudnikov, A. *Transformations intégrales et calcul opérationnel.* Editions de Moscou, 1978.
11. Doetsch, G. *Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation.* München, 1961.
12. Gray, A. and Mathews, G. B. *Bessel functions and their applications to physics.* 1931.
13. Haimovici, A. *Ecuațiile fizicii matematice și elemente de calcul variațional.* Editura didactică și pedagogică, București, 1966.
14. Halanay, A. *Ecuații diferențiale.* Editura didactică și pedagogică. București, 1972.
15. Ivanov, V. A. și colectivul. *Bazele matematice ale teoriei reglajului automat* (în limba rusă). Moscova, 1971.
16. Jeffreys, H. and Jeffreys, B. S. *Methods of mathematical physics.* Cambridge University Press, 1966.
17. Kecs, W. și Teodorescu, P. P. *Introducere în teoria distibuțiilor cu aplicații în tehnică.* Editura tehnică, București, 1975.
18. Koșleakov, N. S. și colectivul. *Ecuațiile diferențiale de bază ale fizicii matematice* (în limba rusă). Moscova, 1962.
19. Krucikovici, G. I. și colectivul. *Culegere de probleme și exerciții din capitale speciale de matematică superioară* (în limba rusă). Moscova, 1970.
20. Lancaster, P. *Theory of matrices.* Academic Press, New York—London, 1969.
21. Mangeron, D. și colectivul. *Fundamentele mecanicii.* Editura Academiei R.P.R., București, 1962.
22. Martînenco, V. S. *Calcul operațional* (în limba rusă). Editura Universității din Kiev, 1968.
23. McLachlan, N. W. *Theory and application of Mathieu functions.* Oxford, 1974.
24. Nikiforov, A. et Ouvarov, V. *Élements de la théorie de fonctions spéciales.* Editions Mir, Moscou, 1976.
25. Polojii, G. N. *Ecuațiile fizicii matematice* (în limba rusă). Editura Școala superioară, Moscova, 1964.
26. Preda, M. și colectivul. *Bazele electrotehnicii. Probleme.* Editura didactică și pedagogică, București, 1980.
27. Roșculeț, M. și Craiu, M. *Ecuații diferențiale aplicative.* Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
28. Sansone, G. *Equazioni differenziali nel campo reale.* Bologna, 1948.
29. Savin, Gh. și Rosman, H. *Circuite electrice neliniare și parametrice.* Editura tehnică, București, 1973.
30. Schwartz, L. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Paris, 1961.
31. Sigorski, V. P. *Aparatul matematic al inginerului* (în limba rusă). Editura Tehnica, Kiev, 1977.
32. Simonyi, K. *Electrotehnică teoretică.* Editura tehnică, București, 1974.
33. Stanomir, D. și Stănășilă, O. *Metode matematice în teoria semnalelor.* Editura tehnică, București, 1980.
34. Șabac, I. Gh. *Matematici speciale.* Vol. 1 și 2, Editura didactică și pedagogică, București, 1954 și 1965.
35. Tihonov, A. N. și Samarski, A. A. *Ecuațiile fizicii matematice* (traducere din limba rusă). Editura tehnică, București, 1956.
36. Tolstov, G. P. *Serii Fourier* (traducere din limba rusă), Editura tehnică, București,
37. Trandafir, R. *Probleme de matematici pentru ingineri.* Editura tehnică, București, 1977.
38. Vladimirov, V. și colectivul. *Recueil de problèmes d'équations de physique mathématique.* Éditions Mir, Moscou, 1976.
39. Webster, A. G. *Partial differential equations of mathematical physics.* Dover Publications, Inc. 1955.

CUPRINS

Capitolul 1. Ecuații și sisteme de ecuații diferențiale ordinare

1.1. Ecuația diferențială ordinară de ordinul întîi 5
1.2. Sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întîi 19
1.3. Funcții de matrici 32
1.4. Ecuația diferențială ordinară de ordinul n 68
1.5. Ecuația și funcțiile lui Bessel 79
1.6. Ecuația și polinoamele lui Hermite 97

Capitolul 2. Calcul operațional

2.1. Transformata Laplace — definiție și proprietăți 105
2.2. Aplicații ale transformatei Laplace. Metoda operațională 151
2.3. Noțiuni de teoria distribuțiilor 175
Exerciții 208
2.4. Transformata Fourier 218
Exerciții 233

Capitolul 3. Ecuații cu derivate parțiale folosite în electrotehnică

3.1. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi 237
3.2. Ecuația lui Laplace. Problemele lui Dirichlet și Neumann 243
3.3. Ecuația și polinoamele lui Legendre 253
3.4. Ecuația lui Laplace și funcțiile sferice 266
Exerciții 276
3.5. Ecuația și funcțiile lui Mathieu 290
3.6. Ecuații hiperbolice — ecuația telegrafiștilor 310
Exerciții 329
Bibliografie 334